

内容

風車超低周波音 2023 (第 2 部)	4
円と橢円	4
円筒の曲げと断面の変化	4
曲げモーメントの周期的変動	4
円筒の側面の変動	4
粗密波の発生	4
流体と揚力	4
揚力ベクトルの周期的な変動	4
7. 物理学より	4
7.1 バネの振動	4
7.1.1 自由振動	4
7.1.2 減衰自由振動	7
7.1.3 強制振動	9
7.1.4 Laplace変換による解法	12
7.1.5 周期的に衝撃が加わる場合	22
7.1.6 連成振動	23
7.2 弦の振動	43
7.2.1 弦の振動と空気	43
7.2.2 弦と響胴	49
7.3 太鼓の振動	51
7.3.1 膜の振動	51
7.3.2 矩形の膜	52
7.3.3 円形の膜	55
7.3.4 波動方程式 (ヨーシーの解法)	61
7.3.5 振動性物体からの低周波音放射	65
7.4 音叉と共に鳴箱と響胴	85
7.4.1 音叉と共に鳴箱	85
7.4.2 強制振動と響胴	87
7.4.3 共鳴箱の底と中	87
7.5 等方性物質と波動方程式	88
7.6 熱力学	108
7.7 波動方程式の解	129
7.8 音速と粒子速度	133
7.8.1 音の伝搬	133
7.8.2 平面音波	136

7.9 音のエネルギー	139
7.10 気柱共鳴と笛	141
7.10.1 篦笛とリコーダー	141
7.10.2 管の中の気体の振動	145
7.10.3 音圧分布と粒子速度	149
7.11 入射波と反射波の干渉	159
7.11.1 定常波の説明の疑問点	159
7.11.2 反射波の重ね合わせ（両端反射）	163
7.11.3 ナセルの材質と音波の反射及び透過について	176
8. 風車	181
8.1 風車の仕組み	181
8.1.1 風車が回る原理	181
8.1.2 揚力について	186
8.1.3 流体力学より	193
8.2 風車の振動と音	221
8.2.1 塔やブレードの固有振動数	221
8.2.2 振動制御	225
8.2.3 風車振動の調査結果	227
8.2.4 強制振動の原因	239
8.2.5 風車音の指向性	242
8.2.6 上空の風と地表近くの風	246
8.2.7 回転制御と揚力ベクトル	263
8.2.8 笛と太鼓のお祭り騒ぎ	268
8.2.10 エッフェル塔の風車	276
8.2.9 揚力以外の塔にかかる力	278
4.4.4 塔の変形について	279
1.2.10 風車にかかる力と気柱音圧の変化	288
4.4.5 ブレード回転軸の首振り	289
4.3.2 ブレード（プロペラ）と発電機を考えた場合	292
5.7 塔の周波数応答	297
8.2.9 風力発電施設から発生する騒音についての諸見解	297
8.3 風車音の物理的影響	303
8.3.1 “怪奇現象”と共振	303
8.3.2 ガタツキ閾値	322
8.3.3 家屋の強制振動	328
8.3.4 音響キャビテーション	335
8.3.5 「安全対策」の意味	363
8.4 風車と環境破壊	373
8.4.1 崩落の責任と損失	373
8.4.2 外来植物と林業	383

風車超低周波音 2023 (第2部)

円と橢円

円筒の曲げと断面の変化

曲げモーメントの周期的変動

円筒の側面の変動

粗密波の発生

流体と揚力

揚力ベクトルの周期的な変動

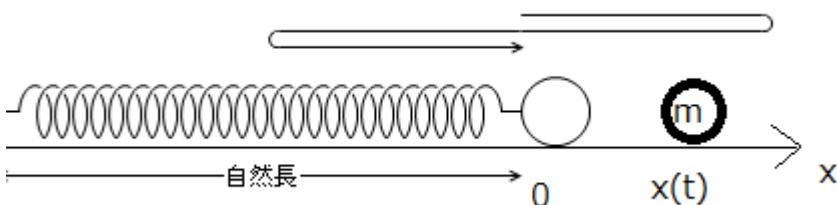
7. 物理学より

7.1 バネの振動

7.1.1 自由振動

水平ばね振り子

一端が固定され、他端に質量 m [kg] のおもりが付けられ、なめらかな水平面に置かれている、ばね定数 k [N/m] のばねを、自然長より A [m] 伸ばして（あるいは縮めて）静かに放した場合の運動を考えてみます。



自然長の位置を原点 O とし、ばねが伸びる向きを変位 x [m] の正の向きとします。

このとき、おもりにはたらく力（弾性力） F [N] はフックの法則より、

水平ばね振り子の復元力

$$F = -kx$$

この式はまさに復元力の形になっている。変位と力の向きが逆で、変位と力の大きさが比例しているからです。

時刻 t における位置(座標)を $x(t)$ と、おもりの加速度を a [m/s²] としますと、運動方程式より、

$$F = ma = -kx$$

$$a = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

より、

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x(t) = 0$$

となる。

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

と置けば、方程式は

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 \cdot x(t) = 0$$

となる。この微分方程式に、

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

を代入してみると式が成立する。よって、この式は上の微分方程式の解である。

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}$$

を代入しても成立する。

さて、

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} +$$

であり、この式で、 x に ix を代入すると、

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

となり、また、

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

も成立するので、

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

となるので、解が三角関数や指数関数で書けることになる。

$$x(t+T) = A\cos\omega(t+T) + B\sin\omega(t+T) = x(t)$$

となるには、

$$\omega T = 2\pi$$

となればよいので、単振動の周期を T [s] は、

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$$

となります。

この式より、おもりの質量 m が大きいほど、あるいは、ばね定数 k が小さいほど（すなわちばねがやわらかいほど）おもりの周期 T が大きい（ゆっくり振動する）と分かります。さらに振幅には無関係であると分かります。大きく引き伸ばしてからおもりを放したとしても振動の周期は変わらないということです。

また、

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

における、A,B の値は、初期条件で決まります。

$t=0$ の時に、 $x(0)=A$ 、 $x'(0)=0$ だとすれば、

$$x(t) = A\cos\omega t + 0\sin\omega t = A\cos\omega t$$

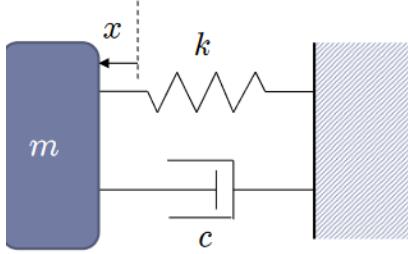
となります。

このとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m(x'(t))^2 + \int_0^{x(t)} F(h)dh &= \frac{1}{2}mA^2\omega^2(\sin\omega t)^2 + \int_0^{x(t)} kh dh = \frac{1}{2}mA^2\omega^2(\sin\omega t)^2 + \frac{1}{2}k(x(t))^2 \\ &= \frac{1}{2}mA^2\omega^2(\sin\omega t)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(A\cos\omega t)^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned}$$

も成り立つ。

7.1.2 減衰自由振動



$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -k \cdot x(t) - c \frac{dx(t)}{dt}$$

復元力 $-k \cdot x(t)$ や、粘性による減衰力 $-c \frac{dx(t)}{dt}$ が働く場合を考える。

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

$$2h\omega = c/m$$

と置けば、方程式は

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2h\omega \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = 0$$

となる。(h を減衰定数とよぶ。)

$$x(t) = Ae^{\lambda t}$$

を代入してみれば、

$$(\lambda^2 + 2h\omega\lambda + \omega^2)Ae^{\lambda t} = 0$$

となり、

$$(\lambda^2 + 2h\omega\lambda + \omega^2) = 0$$

この解は

$$\lambda_1 = -h\omega + \sqrt{h^2 - 1}\omega = -h\omega + i\sqrt{1 - h^2}\omega$$

$$\lambda_2 = -h\omega - \sqrt{h^2 - 1}\omega = -h\omega - i\sqrt{1 - h^2}\omega$$

である。

解は3つの場合に分かれる。

(1) $h > 1$ の場合

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \\ &= e^{-h\omega t}(Ae^{\sqrt{h^2-1}\omega t} + Be^{-\sqrt{h^2-1}\omega t}) \\ &= e^{-h\omega t}(a\cosh\sqrt{h^2-1}\omega t + b\sinh\sqrt{h^2-1}\omega t) \end{aligned}$$

を得る。ただし、

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

とする。

(2) $h < 0$ の場合

$$\begin{aligned}x(t) &= Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \\&= e^{-h\omega t}(Ae^{i\sqrt{1-h^2}\omega t} + Be^{-i\sqrt{1-h^2}\omega t})\end{aligned}$$

となるが、この解が実数解であることを要求すれば、A, Bが互いに共役な複素数でなくてはならない。

$$A = \frac{a - bi}{2}, B = \frac{a + bi}{2}$$

と置いて、

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$$

であることに注意すれば、

$$x(t) = e^{-h\omega t}(a \cos \sqrt{1-h^2}\omega t + b \sin \sqrt{1-h^2}\omega t)$$

を得る。

(3) $h = 1$ の場合

方程式は

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\omega \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = 0$$

となり、代入してみれば、 $e^{-\omega t}$ と $te^{-\omega t}$ が解であることが分かり、

方程式の解として

$$x(t) = (a + bt)e^{-\omega t}$$

が得られる。

初期条件

初期変位 d_0 と初期速度 v_0 が与えられた場合は、A, B が決まり。それぞれ、次の様な式になる。

(1) ($h > 1$)

$$x(t) = e^{-h\omega t}(d_0 \cosh \sqrt{h^2 - 1}\omega t + \frac{v_0 + h\omega d_0}{\sqrt{h^2 - 1}\omega} \sinh \sqrt{h^2 - 1}\omega t)$$

(2) ($h < 1$)

$$x(t) = e^{-h\omega t}(d_0 \cos \sqrt{1-h^2}\omega t + \frac{v_0 + h\omega d_0}{\sqrt{1-h^2}\omega} \sin \sqrt{1-h^2}\omega t)$$

(3) ($h = 1$)

$$x(t) = e^{-h\omega t}(d_0 + (\omega d_0 + v_0)t)$$

となる。

7.1.3 強制振動

- 外力を振動させた場合の運動方程式:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = a \cos \omega t$$

- a が外力の振幅を表す。

$$f = a \cos \omega t$$

- 一般解(実数固有値をもつ場合):

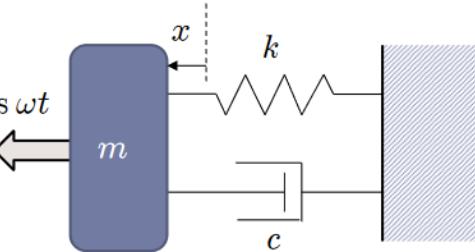
自由振動の一般解

$$x = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) + A \cos(\omega t - \phi) \rightarrow \text{定常振動解}$$

$$A = \frac{a}{\sqrt{(m\omega^2 - k)^2 + c^2\omega^2}}, \quad \phi = \arg(k - m\omega^2, c\omega)$$

定常振動の振幅(Amplitude) 位相遅れ(Phase delay; Phase lag)

- 「自由振動の一般解」の部分の未定係数は外力項の影響を受ける。
- このように、一般解が自由振動解と定常振動解の「和」になるのは、"線形微分方程式"だからである。单振り子のように非線形の場合は、厳密には一般解が「和」にならない。



周期的な外力 $F \cos pt$ が働く場合を考える。

方程式は

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -k \cdot x(t) - c \frac{dx(t)}{dt} + F \cos pt$$

であり、

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

$$2h\omega = c/m$$

と置けば、方程式は

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2h\omega \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = \frac{F}{m} \cos pt$$

と書ける。そこで、

$$x(t) = A \cos(pt - \theta)$$

が解となる条件を調べる。代入すれば

$$\begin{aligned} & (\omega^2 - p^2) A \cos(pt - \theta) - 2h\omega p \sin(pt - \theta) \\ &= \sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4h^2\omega^2 p^2} A \cos(pt - \theta + \tan^{-1}(2h\omega p / (\omega^2 - p^2))) \equiv \frac{F}{m} \cos pt \end{aligned}$$

となるので、この式が恒等的に成立する条件として、 A と θ が次の様に定まる。

$$A = \frac{F}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4h^2\omega^2 p^2}} = \delta_s \frac{1}{\sqrt{(1 - p^2/\omega^2)^2 + 4h^2 p^2/\omega^2}}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{2hp}{\omega} \right) / (1 - p^2/\omega^2)$$

$$\delta_s = F/k$$

を得る。

$p/\omega = 1$ となる点を共振点という。

この時の振幅は

$$A = \frac{1}{2h} \delta_s$$

$\phi = p/\omega$ として、 $dA/d\varphi = 0$ より、振幅は $\varphi = \sqrt{1 - 2h^2}$ の時に最大値

$$A = \frac{1}{2h\sqrt{1-h^2}} \delta_s$$

をとる。

なお、 $c=h=0$ (非減衰)の場合には、

解は、

$$x(t) = \delta_s \frac{1}{1-p^2/\omega^2} \cos(pt)$$

となり、 $p=\omega$ の時に振幅は無限大になる。

この解に、

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2h\omega \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = 0$$

の解を加えたものも解であるから、

(1) $h > 1$ の場合

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \\ &= e^{-h\omega t}(Ae^{\sqrt{h^2-1}\omega t} + Be^{-\sqrt{h^2-1}\omega t}) \\ &= e^{-h\omega t}(a\cosh\sqrt{h^2-1}\omega t + b\sinh\sqrt{h^2-1}\omega t) \end{aligned}$$

(2) $h < 0$ の場合

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \\ &= e^{-h\omega t}(Ae^{i\sqrt{1-h^2}\omega t} + Be^{-i\sqrt{1-h^2}\omega t}) \\ x(t) &= e^{-h\omega t}(a\cos\sqrt{1-h^2}\omega t + b\sin\sqrt{1-h^2}\omega t) \end{aligned}$$

(3) $h = 1$ の場合

$$x(t) = (a + bt)e^{-\omega t}$$

を加えたものが方程式の解となる。

圧迫感の感知と音としても感知

周波数が 0.5 (Hz) の音を考える。

波長は、 $340/0.5=680\text{m}$ 、波は、1秒間に 0.5 回、したがって、2秒に 1 回の割合で繰り返す。

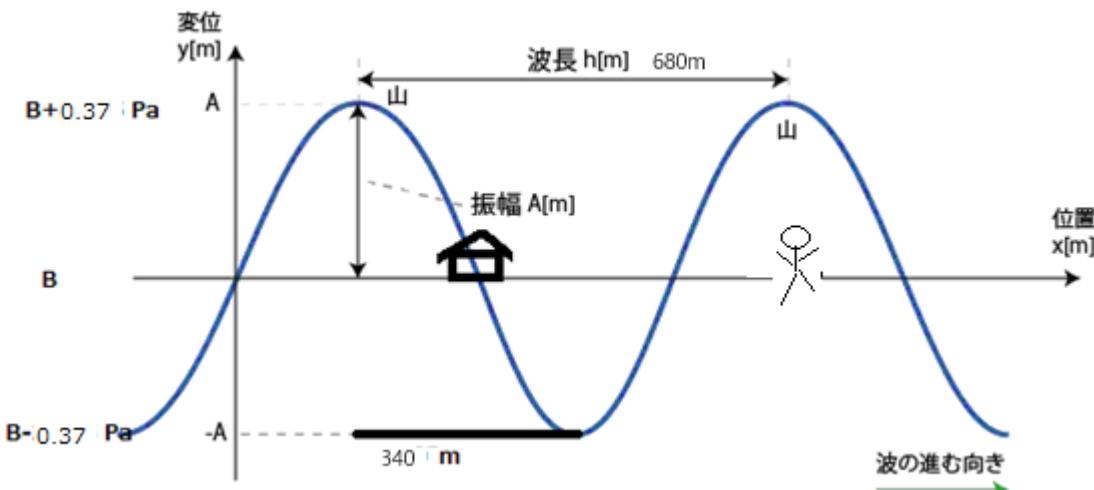
音圧を 0.37 (Pa) として、ある時刻 t を固定すれば、下の図のようになる。

右の人物（風船のように反応すると考える）は、

気圧が高くなった中にいるので、押しつぶされている。

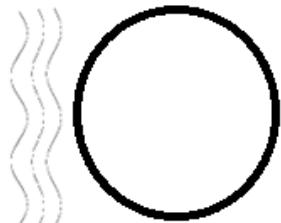
1秒後には波が右に 340m 進むので、気圧が低くなり、膨張する。

2秒後には、波は 680m 進むので、気圧が高くなり、押しつぶされる。



押しつぶされたり、膨張したりすれば、圧迫感を覚えるのは当然です。これは、聴覚での把握とは言えません。

周波数が高ければ、風船の表面は振動するでしょう。これは、鼓膜が振動するのと同じですから、この場合は、音を聴覚で感知したと言えます。



ですから、表面が振動する反応と、表面が振動しないで押しつぶされたり膨張したりする反応の 2 種類があると考えられます。

音に対して、聴覚での“うるささ”としての感知と、体に対する圧力変動を“圧迫感”として感知する場合の 2 種類があると考えるべきです。こちらは、頭痛などとの関連が考えられます。

従って、超低周波音の感知には、聴覚メカニズムによらないものがある。と考えるべきです。

10Hz, 12.5Hz, 16Hz は超低周波音の領域です。感覚閾値とされる 100 dBあたりの音圧よりも低い段階で、不快感を覚えてしまいます。知覚できなくても、人間の感覚は不快感を覚えてしまうのです。

ですから、“超低周波音（知覚できない）”としてはいけないのです。

7.1.4 Laplace変換による解法

ラプラス変換

ラプラス変換とは、変数tについて区間 $[0, +\infty)$ で定義された関数 $f(t)$ に対して、

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

を対応させるものです。この変換を、 $F(s) = L(f(t))$ と書きます。この変換に関して

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos \lambda t dt = \frac{s}{s^2 + \lambda^2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin \lambda t dt = \frac{\lambda}{s^2 + \lambda^2}$$

などのほかに次の公式が成り立ちます。

以下、 $F(s) = L(f(t))$ 、 $G(s) = L(g(t))$ 、 λ 、 μ は定数とする。

$$(1) \quad L(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda F(s) + \mu G(s)$$

$$(2) \quad L(f(\lambda t)) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right) \quad (\lambda > 0)$$

$$(3) \quad L(f(t - \lambda)) = e^{-\lambda s} F(s)$$

$$(4) \quad L(f(t + \lambda)) = e^{\lambda s} \{F(s) - \int_0^\lambda e^{-st} f(t) dt\}$$

$$(5) \quad L(e^{t\mu} f(t)) = F(s - \mu)$$

$$(6) \quad L\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) = \frac{1}{s} F(s)$$

$$(7) \quad L\left(\int_0^t \int_0^{\tau_{n-1}} \cdots \int_0^{\tau_1} f(\tau) d\tau d\tau_1 \cdots d\tau_{n-1}\right) = \frac{1}{s^n} F(s)$$

$$(8) \quad L(f'(t)) = sF(s) - f(+0)$$

$$(9) \quad L(f^{(n)}(t)) = s^n F(s) - f(+0)s^{n-1} - f'(+0)s^{n-2} - \cdots - f^{(n-1)}(+0)$$

$$(10) \quad L(-tf(t)) = \frac{d}{ds} F(s)$$

$$(11) \quad L((-t)^n f(t)) = \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

$$(12) \quad L\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_0^{+\infty} F(\sigma) d\sigma$$

$$(13) \quad L\left(\frac{f(t)}{t^n}\right) = \int_s^{+\infty} \int_{\sigma_{n-1}}^{+\infty} \cdots \int_{\sigma_1}^{+\infty} F(\sigma) d\sigma d\sigma_1 \cdots d\sigma_{n-1}$$

$$(14) \quad L(f)L(g) = L(f * g)$$

この(14)式については証明をつけておきます。

$$L(f)L(g) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-su} f(u) du \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-sv} g(v) dv \right) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-s(u+v)} f(u) g(v) du dv$$

ここで、 $u+v=t, v=\tau$ とおけば、 $u=t-\tau, v=\tau$ であり、ヤコビアンは

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(t,\tau)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{であり、積分は、}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau dt = \int_0^{+\infty} s^{-st} h(t) dt = L(f * g)$$

となる。

逆ラプラス変換

$L(f(t))=F(s)$ の変換において、 $L(f_1(t))=L(f_2(t))=F(s)$ ならば、 $f_1(t)-f_2(t)$ との差は零関数となる。零関数とは、すべての T に対して、 $\int_0^T g(t) dt = 0$ が成立するような関数 $g(t)$ のことです。したがって、 $L(f(t))=F(s)$ となる $f(t)$ は零関数を除いて一意的に定まる。このような $f(t)$ を $F(s)$ のラプラス逆変換と呼んで、 $f(t)=L^{-1}(F)$ とあらわす。ラプラス変換の基本公式を使って、ラプラス逆変換を求める。

このラプラス変換とラプラス逆変換を使うと微分方程式を解くことができる。

微分方程式への応用

最初に、

$$y'' + ay' + by = f(t), y(0) = y_0, y'(0) = v$$

を解く。両辺にラプラス変換を施せば

$$s^2 Y(s) - sy_0 - v + a(sY(s) - y_0) + bY(s) = F(s)$$

よって、

$$Y(s) = \frac{sy_0 + v + ay_0}{s^2 + as + b} + \frac{F(s)}{s^2 + as + b}$$

特性方程式 $s^2 + as + b = 0$ の解 α, β にかんして場合わけをする。

(1) α, β が相異なる実数の場合。

$$\frac{1}{s^2 + as + b} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{s - \alpha} - \frac{1}{s - \beta} \right), \quad \frac{s}{s^2 + as + b} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha}{s - \alpha} - \frac{\beta}{s - \beta} \right)$$

となることから、

$$\begin{aligned} & \frac{sy_0 + v + ay_0}{s^2 + as + b} \\ &= \frac{y_0\alpha + v + ay_0}{\alpha - \beta} \frac{1}{s - \alpha} - \frac{y_0\beta + v + ay_0}{\alpha - \beta} \frac{1}{s - \beta} \end{aligned}$$

となり、逆ラプラス変換で

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{y_0\alpha + v + ay_0}{\alpha - \beta} L^{-1}\left(\frac{1}{s - \alpha}\right) - \frac{y_0\beta + v + ay_0}{\alpha - \beta} L^{-1}\left(\frac{1}{s - \beta}\right) \\ &+ \frac{1}{\alpha - \beta} \left(L^{-1}\left(\frac{1}{s - \alpha} F(s)\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{s - \beta} F(s)\right) \right) \\ &= \frac{y_0\alpha + v + ay_0}{\alpha - \beta} \exp(\alpha t) - \frac{y_0\beta + v + ay_0}{\alpha - \beta} \exp(\beta t) \\ &+ \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\int_0^t f(\tau) \exp(\alpha(t - \tau)) d\tau - \int_0^t f(\tau) \exp(\beta(t - \tau)) d\tau \right) \end{aligned}$$

を得る。

(2) $\alpha = \beta$ の場合

$$\begin{aligned} & \frac{sy_0 + v + ay_0}{s^2 + as + b} \\ &= \frac{y_0(s-a) + y_0\alpha + v + ay_0}{(s-\alpha)^2} = \frac{y_0}{(s-a)} + \frac{y_0\alpha + v + ay_0}{(s-a)^2} \end{aligned}$$

となり、逆ラプラス変換で

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 L^{-1}\left(\frac{1}{s-\alpha}\right) + (y_0\alpha + v + ay_0) L^{-1}\left(\frac{1}{(s-\alpha)^2}\right) \\ &+ L^{-1}\left(\frac{1}{(s-\alpha)^2} F(s)\right) \\ &= y_0 \exp(\alpha t) + (y_0\alpha + v + ay_0)t \exp(\alpha t) \\ &+ \int_0^t \tau \exp(\alpha\tau) f(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

を得る。

(3) α, β が共役な2根のとき、 $\alpha = \bar{\beta} = p + q i$, ($q \neq 0$)

このとき、

$$s^2 + as + b = (s - p)^2 + q^2$$

$$\frac{y_0 s + v + ay_0}{s^2 + as + b} = \frac{y_0(s-p)}{(s-p)^2 + q^2} + \frac{y_0 p + v + ay_0}{q} \frac{q}{(s-p)^2 + q^2}$$

となり、逆ラプラス変換で

$$y(t) = y_0 L^{-1} \left(\frac{s-p}{(s-p)^2 + q^2} \right) + \frac{y_0 p + v + ay_0}{q} L^{-1} \left(\frac{q}{(s-p)^2 + q^2} \right) + \frac{1}{q} L^{-1} \left(\frac{q}{(s-p)^2 + q^2} F(s) \right)$$

を得る。

$$= y_0 \exp(pt) \cos(qt) + \frac{y_0 + v + ay_0}{q} \exp(pt) \sin(qt) + \frac{1}{q} \int_0^t f(t-\tau) \exp(p\tau) \sin(q\tau) d\tau$$

Laplace変換での解

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta \frac{dx}{dt} + F \cos \omega t \quad (1)$$

を解く。両辺をmで割って移項すれば、

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m} \cos \omega t$$

となり、記号を先ほどのものにあわせて

$$x \rightarrow y, \frac{k}{m} = a, \frac{\beta}{m} = b, \frac{F}{m} \cos \omega t = f(t) \text{ と書き換えて、ラプラス変換をすれば、}$$

方程式は、

$$y'' + ay' + by = f(t), y(0) = y_0, y'(0) = v$$

を解く。両辺にラプラス変換を施せば

$$s^2Y(s) - sy_0 - v + a(sY(s) - y_0) + bY(s) = F(s)$$

$$\text{ここで、 } F(s) = \frac{F}{m} \int_0^t e^{-st} \cos \omega t dt = \frac{F}{m} \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

よって、

$$Y(s) = \frac{sy_0 + v + ay_0}{s^2 + as + b} + \frac{F}{m} \frac{1}{s^2 + as + b} \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

特性方程式 $s^2 + as + b = 0$ の解 α, β にかんして場合わけをする。

(1) α, β が相異なる実2数の場合。

$$\frac{1}{s^2 + as + b} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{1}{s - \alpha} - \frac{1}{s - \beta} \right), \quad \frac{s}{s^2 + as + b} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha}{s - \alpha} - \frac{\beta}{s - \beta} \right)$$

$$\frac{1}{(s - \alpha)(s^2 + \omega^2)} = \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \frac{1}{s - \alpha} - \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \frac{s + \alpha}{s^2 + \omega^2}$$

$$\frac{s + \alpha}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{\alpha}{s^2 + \omega^2}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{F}{m} \frac{1}{s^2 + as + b} \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{F}{m} \left(\frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha}{(s - \alpha)(s^2 + \omega^2)} - \frac{\beta}{(s - \beta)(s^2 + \omega^2)} \right) \right) \\
&= \frac{F}{m} \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \frac{1}{(s - \alpha)(s^2 + \omega^2)} - \frac{F}{m} \frac{\beta}{\alpha - \beta} \frac{1}{(s - \beta)(s^2 + \omega^2)} \\
&= \frac{F}{m} \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{s - \alpha} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \frac{\alpha}{s^2 + \omega^2} \right) \\
&- \frac{F}{m} \frac{\beta}{\alpha - \beta} \frac{1}{\beta^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{s - \beta} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \frac{\beta}{s^2 + \omega^2} \right) \\
&\frac{sy_0 + v + ay_0}{s^2 + as + b} \\
&= \frac{y_0 \alpha + v + ay_0}{\alpha - \beta} \frac{1}{s - \alpha} - \frac{y_0 \beta + v + ay_0}{\alpha - \beta} \frac{1}{s - \beta}
\end{aligned}$$

となり、逆ラプラス変換で

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{y_0 \alpha + v + ay_0}{\alpha - \beta} L^{-1} \left(\frac{1}{s - \alpha} \right) - \frac{y_0 \beta + v + ay_0}{\alpha - \beta} L^{-1} \left(\frac{1}{s - \beta} \right) \\
&+ \frac{1}{\alpha - \beta} \left(L^{-1} \left(\frac{1}{s - \alpha} F(s) \right) - L^{-1} \left(\frac{1}{s - \beta} F(s) \right) \right) \\
&= \frac{y_0 \alpha + v + ay_0}{\alpha - \beta} \exp(\alpha t) - \frac{y_0 \beta + v + ay_0}{\alpha - \beta} \exp(\beta t) \\
&+ \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\int_0^t f(\tau) \exp(\alpha(t - \tau)) d\tau - \int_0^t f(\tau) \exp(\beta(t - \tau)) d\tau \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{y_0 \alpha + v + ay_0}{\alpha - \beta} L^{-1} \left(\frac{1}{s - \alpha} \right) - \frac{y_0 \beta + v + ay_0}{\alpha - \beta} L^{-1} \frac{1}{s - \beta} \\
&+ \frac{F}{m} \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} L^{-1} \left(\frac{1}{s - \alpha} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \frac{\alpha}{s^2 + \omega^2} \right) \\
&- \frac{F}{m} \frac{\beta}{\alpha - \beta} \frac{1}{\beta^2 + \omega^2} L^{-1} \left(\frac{1}{s - \beta} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \frac{\beta}{s^2 + \omega^2} \right)
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{y_0 \alpha + v + ay_0}{\alpha - \beta} \exp(\alpha t) - \frac{y_0 \beta + v + ay_0}{\alpha - \beta} \exp(\beta t) \\
&+ \frac{F \alpha}{m(\alpha - \beta)} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \left(\exp(\alpha t) - \cos(\omega t) - \frac{\alpha}{\omega} \sin(\omega t) \right) \\
&- \frac{F \beta}{m(\alpha - \beta)} \frac{1}{\beta^2 + \omega^2} \left(\exp(\beta t) - \cos(\omega t) - \frac{\beta}{\omega} \sin(\omega t) \right)
\end{aligned}$$

整理して、

$$\begin{aligned}
y(t) &= \left(\frac{y_0 \alpha + v + ay_0}{\alpha - \beta} + \frac{F\alpha}{m(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \omega^2)} \right) \exp(\alpha t) \\
&- \left(\frac{y_0 \beta + v + ay_0}{\alpha - \beta} + \frac{F\beta}{m(\alpha - \beta)(\beta^2 + \omega^2)} \right) \exp(\beta t) \\
&+ \frac{F}{m(\alpha - \beta)} \left(\left(\frac{\beta}{\beta^2 + \omega^2} - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \right) \cos(\omega t) - \left(\frac{\beta^2}{(\beta^2 + \omega^2)\omega} - \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \omega^2)\omega} \right) \sin(\omega t) \right)
\end{aligned}$$

を得る。

(2) $\alpha = \beta$ の場合

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{F}{m} \int_0^t e^{-st} \cos \omega t dt = \frac{F}{m} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\
&\frac{sy_0 + v + ay_0}{s^2 + as + b} \\
&= \frac{y_0(s-a) + y_0\alpha + v + ay_0}{(s-\alpha)^2} = \frac{y_0}{(s-a)} + \frac{y_0\alpha + v + ay_0}{(s-a)^2}
\end{aligned}$$

となり、逆ラプラス変換で

$$\begin{aligned}
y(t) &= y_0 L^{-1} \left(\frac{1}{s-\alpha} \right) + (y_0\alpha + v + ay_0) L^{-1} \left(\frac{1}{(s-\alpha)^2} \right) \\
&+ L^{-1} \left(\frac{1}{(s-\alpha)^2} F(s) \right) \\
&= y_0 \exp(\alpha t) + (y_0\alpha + v + ay_0)t \exp(\alpha t) \\
&+ \frac{F}{m} L^{-1} \left(\frac{1}{(s-\alpha)^2} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right)
\end{aligned}$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned}
& \frac{s}{(s-\alpha)^2} \frac{1}{s^2 + \omega^2} = \left(\left(\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2} + \frac{\alpha}{(s-\alpha)^2} \right) \frac{1}{s^2 + \omega^2} \right) \\
&= \frac{1}{(s-\alpha)(s^2 + \omega^2)} + \alpha \frac{1}{(s-\alpha)^2(s^2 + \omega^2)} \\
&= \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{s-\alpha} - \frac{s+\alpha}{s^2 + \omega^2} \right) + \frac{\alpha}{s-\alpha} \left(\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{s-\alpha} - \frac{s+\alpha}{s^2 + \omega^2} \right) \right) \\
&= \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{s-\alpha} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \frac{\alpha}{s^2 + \omega^2} \right) \\
&+ \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{(s-\alpha)^2} - \frac{1}{s^2 + \omega^2} - \frac{2\alpha}{(s-\alpha)(s^2 + \omega^2)} \right) \\
&= \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \left\{ \left(\frac{1}{s-\alpha} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \frac{\alpha}{s^2 + \omega^2} \right) \right\} \\
&+ \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \left\{ \left(\frac{1}{(s-\alpha)^2} - \frac{1}{s^2 + \omega^2} - \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{s-\alpha} - \frac{s+\alpha}{s^2 + \omega^2} \right) \right) \right\} \\
&= \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \left(\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{(s-\alpha)^2} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \frac{\alpha+1}{s^2 + \omega^2} \right) \\
&+ \frac{2\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} \left(\frac{1}{s-\alpha} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} - \frac{\alpha}{s^2 + \omega^2} \right)
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
y(t) &= y_0 \exp(\alpha t) + (y_0 \alpha + v + ay_0)t \exp(\alpha t) \\
&+ \frac{F}{m} \left\{ \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \left(\exp(\alpha t) + t \exp(\alpha t) - \cos(t\omega) - \frac{\alpha+1}{\omega} \sin(t\omega) \right) \right\} \\
&+ \frac{F}{m} \left\{ \frac{2\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} \left(\exp(\alpha t) - \cos(t\omega) - \frac{\alpha}{\omega} \sin(t\omega) \right) \right\}
\end{aligned}$$

(3) α, β が共役な2根のとき、 $\alpha = \bar{\beta} = p + q i$, ($q \neq 0$)

このとき、

$$s^2 + as + b = (s - p)^2 + q^2$$

$$\frac{y}{s^2 + as + b} = \frac{y_0(s-p)}{(s-p)^2 + q^2} + \frac{y_0 p + v + ay_0}{q} \frac{q}{(s-p)^2 + q^2}$$

$$F(s) = \frac{F}{m} \int_0^t e^{-st} \cos \omega t dt = \frac{F}{m} \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

となり、逆ラプラス変換で

$$y(t) = y_0 L^{-1} \left(\frac{s-p}{(s-p)^2 + q^2} \right) + \frac{y_0 p + v + ay_0}{q} L^{-1} \left(\frac{q}{(s-p)^2 + q^2} \right) + \frac{1}{q} L^{-1} \left(\frac{q}{(s-p)^2 + q^2} F(s) \right)$$

を得る。ここで、

$$= y_0 \exp(pt) \cos(qt) + \frac{y_0 + v + ay_0}{q} \exp(pt) \sin(qt) + \frac{F}{m} L^{-1} \left(\frac{s}{(s^2 + as + b)(s^2 + \omega^2)} \right)$$

$$\frac{s}{(s^2 + as + b)(s^2 + \omega^2)} = \frac{1}{(b - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2} \left\{ \frac{(\omega^2 - b)s - ab}{s^2 + as + b} + \frac{(b - \omega^2)s + a\omega^2}{s^2 + \omega^2} \right\}$$

さらに、

$$\begin{aligned} \frac{(\omega^2 - b)s - ab}{s^2 + as + b} &= \frac{(\omega^2 - b)(s - p) + (\omega^2 - b)p - ab}{(s - p)^2 + q^2} \\ &= (\omega^2 - b) \frac{(s - p)}{(s - p)^2 + q^2} + \{(\omega^2 - b) - ab\} \frac{1}{q} \frac{q}{(s - p)^2 + q^2} \end{aligned}$$

$$L^{-1} \left(\frac{s-p}{(s-p)^2 + q^2} \right) = e^{pt} \cos qt, \quad L^{-1} \left(\frac{q}{(s-p)^2 + q^2} \right) = e^{pt} \sin qt$$

$$\left\{ \frac{(b - \omega^2)s + a\omega^2}{s^2 + \omega^2} \right\} = (b - \omega^2) \frac{s}{s^2 + \omega^2} + a\omega \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$L^{-1} \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) = \cos(t\omega), \quad L^{-1} \left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right) = \sin(t\omega)$$

したがって、

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 L^{-1} \left(\frac{s-p}{(s-p)^2 + q^2} \right) + \frac{y_0 p + v + ay_0}{q} L^{-1} \left(\frac{q}{(s-p)^2 + q^2} \right) + \frac{1}{q} L^{-1} \left(\frac{q}{(s-p)^2 + q^2} F(s) \right) \\ &= y_0 \exp(pt) \cos(qt) + \frac{y_0 + v + ay_0}{q} \exp(pt) \sin(qt) \\ &\quad + \frac{F}{m} \frac{1}{\{(b - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2\}} \left\{ (\omega^2 - b)e^{pt} \cos qt + \frac{(\omega^2 - b)p - ab}{q} e^{pt} \sin qt \right\} \\ &\quad + \frac{F}{m} \frac{1}{\{(b - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2\}} \{ (b - \omega^2) \cos(t\omega) + a\omega \sin(t\omega) \} \end{aligned}$$

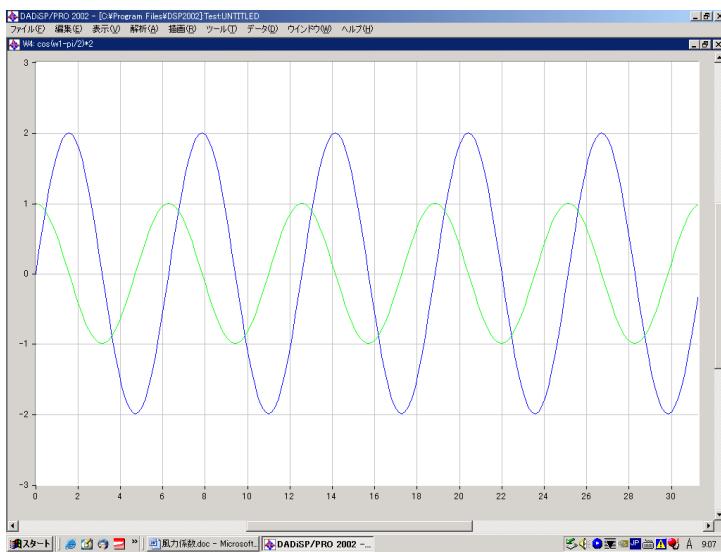
$t \rightarrow \infty$ とすると、 $p < 0$ なので最後の部分だけが残り、

$$y(t) = \frac{F}{m\sqrt{(b - \omega^2)^2 + a^2 \omega^2}} \cos(t\omega - \theta) \quad \text{ただし、} \tan \theta = \frac{a\omega}{b - \omega^2}$$

になる。

特解は外力の振動数で振動しているが、 x の位相は外力に比べて θ だけ遅れている。(図2 参照)。 θ が負の場合は位相は外力に比べて進んでいることになる。

図2: 外力と応答との関係



共鳴現象

ω は考えている系がもつ固有振動数である。例えば、建築物はそれ固有の振動数を持っている。高いビルの固有振動の周期は数秒の大きさである。建物の固有振動数は一つとは限らない。単純なバネでは固有振動数は、 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ 、 $b = \omega_0^2$ で決まるらしいである。

$$\frac{F}{m\sqrt{(b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2}} = \frac{F}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}}$$

横軸を ω にとり、上の振幅を図に表すと図2のようになる。丁度 $\omega = \omega_0$ の時、振幅が最大になる。これを共鳴現象と呼ぶ。aが小さいすなわち、kが小さな弱いばねのときはこの値はとても大きくなる。

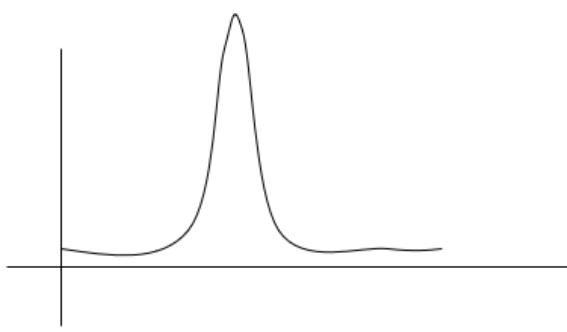


図3: 振幅の振動数依存性

7.1.5 周期的に衝撃が加わる場合

簡単にするために抵抗は無視することにして、微分方程式

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + f(t) \quad f(t) \text{ は外力}, \quad x(0) = x_0, x'(0) = v$$

を考える。ラプラス変換で解は

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos t\omega + \frac{v}{\omega} \sin t\omega + \frac{1}{m\omega} \int_0^t f(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \\ &= \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2} \sin(t\omega + \theta) + \frac{1}{m\omega} \int_0^t f(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

ここで、 $f(t)$ が周期的な衝撃で、 $\sin(t\omega + \theta)$ が 1 となるときに δ 秒間だけ力が加わる場合は

$$f(\tau) = \begin{cases} -F & (2n\pi + \frac{\pi}{2} < \tau\omega + \theta < 2n\pi + \frac{\pi}{2} + \delta) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

として、

$$\int_0^t f(\tau) \sin(t\omega - \tau\omega) d\tau = -kF\delta \sin(t\omega - \frac{\pi}{2} + \theta) = kF\delta \cos(t\omega + \theta)$$

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{kF\delta}{m\omega}\right)^2} \sin(t\omega + \theta_2)$$

となり、振幅(圧力)は損失が無ければ無限大となる。

☆ これは、1 回たたくごとに方程式の解を求め、 $t\omega + \theta$ の θ を少しずつ変化させその変化した θ を使って、 $\sin(t\omega + \theta) = 1$ となる t を決定するべきだとは思いますが、手を抜きました。

ブランコを押す。

ブランコで運動エネルギーと位置エネルギーの合計は一定です。位置が最も高くなったとき、運動エネルギーは 0 になります。その瞬間にブランコを押せば新しく運動エネルギーが加わります。この結果、ブランコの持つ運動エネルギーと位置エネルギーの総和は増えます。

毎回押さなくても、2 回に 1 回押すことによってエネルギーの総和は増加します。

7.1.6 連成振動

(万象醉歩 より)

壁で音が反射するのは理解できます。

でも、なぜ壁もない管の出口で音が反射するのでしょうか。

バネでつないだ重りモデル

空気の管とはかなり異なりますが、重りをバネでつないだモデルで考えてみましょう。

端で重りを押すと、その力はバネを介して縦波（疎密波）として次々に伝わっていきます。

押された各重りは右に動き、直ぐ元の位置にもどるのですが、その動く量は、端の重りを除いて一定です。

波が端に到達すると、端の重りが動きます。この時端の重りはその先に押すべき重りがないため、これまでより大きく右に動きます。

端の重りは、安定して波を伝えるための動きより大きく右に動いてしまいますので、バネが伸びすぎてしまいます。

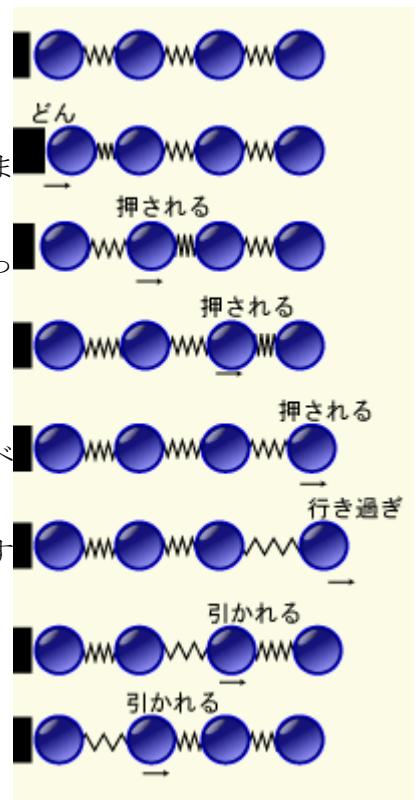
伸びたバネは、左の重りを引っ張ります。

引かれた右に動いた重りはバネを介して左の重りを引くことになります。

こうして、当初押す形で右に進んだ波が今度は引く形で左に進みます。

即ち、波が反射したのです。

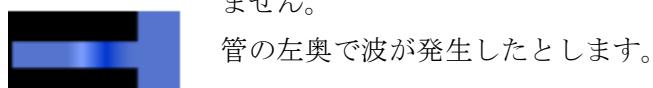
波の反射する位置は、端より少し出た所になることもあります。



管の場合



もちろん、管の空気の場合は、管の端で切れている訳ではありませんので、全く同じでは有りません。



管の左奥で波が発生したとします。



波は右方向に進みます。



管の口に達すると、横方向にも広がろうとします。



これまでより広い範囲に広がりますので中央の圧力は単純に進行していたときに比べ低くなります。



管内の空気が、外の圧力の低さに引かれます。



圧力の低い部分は波となって管内を逆走します。

波が反射したのです。

バネで結ばれた重りのモデルと同様にこの空気管モデルでも、反射位置は端より少し外側になります。

図はシミュレーションによって得ている訳ではなく、想像による作図です。 管の中の疎密波が単純に垂直で、管の外が単純な円形であるのは作図の都合です。

上の話を、詳しく考えます。

(物理学 E(振動・波動) 講義ノート 武藤恭之 より)

連成振動

複数のおもりをばねでつなげた時に起こる振動現象を、連成振動という。例えば、固体は、それを構成する原子がたくさん並んだものであるが、一つ一つの原子を「おもり」とみなし、それが隣の原子と相互作用する様子を「ばねでつながれている」と解釈すると、固体の振動現象を、連成振動として理解することができる。

2.1 二自由度の連成振動

まず、簡単のため、おもりが2つしかない場合を考えよう。

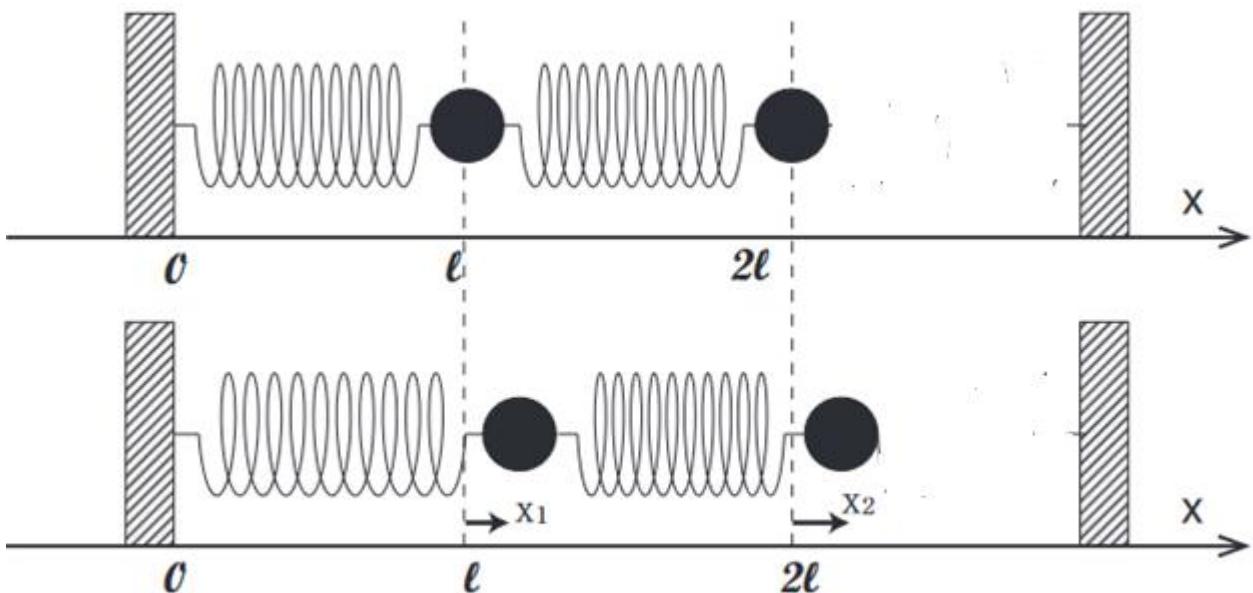


図 2.1 二つのおもりの連成振動

質量 m の質点2つを、ばね定数 k のばね2本を使ってまっすぐにつなぎ、左端を壁に固定する。ばねの方向に x 軸を取り、その方向にしかおもりは動かないものとする。

全てのばねが自然長である時を基準に取り、時刻 t における、左側のおもりのずれを $x_1(t)$ 、右側のおもりのずれを $x_2(t)$ とおく。この時、最も左側のばねの伸びが $x_1(t)$ (ただし、 $x_1 < 0$ の時は、ばねが縮んでいると解釈する)、真ん中のばねの伸びが $x_2(t) - x_1(t)$ である。したがって、左側の重りの運動方程式は、

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \quad (2.1)$$

であり (真ん中のばねが伸びている時、左側のおもりを「引っ張る」ことに注意せよ)、右側のおもりの運動方程式は

$$m \frac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) \quad (2.2)$$

である。一つのばねにつながれたおもりの角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ を用いて運動方程式を書き直すと

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\omega^2 x_1 + \omega^2(x_2 - x_1) \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\omega^2(x_2 - x_1) \quad (2.4)$$

となる。これは、 (x_1, x_2) に関する連立微分方程式である。二つのおもりの位置を縦に並べたベクトル

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

を導入して、微分方程式を行列の形で書き直すと

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

となる。

この微分方程式の解が

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{i\alpha t} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

の形で表されると仮定して、 α および A_1, A_2 を求めたい。代入して整理すると

$$\alpha^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

となる。線形代数の言葉で言えば、求めたい α は、行列

$$\begin{pmatrix} 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \omega^2 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

の固有値である、ということができる。

式 (2.8) を変形して

$$\begin{pmatrix} 2\omega^2 - \alpha^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \omega^2 - \alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.10)$$

とすると、この方程式がゼロでない解を持つためには、係数の行列式がゼロ、すなわち

$$(2\omega^2 - \alpha^2)(\omega^2 - \alpha^2) - \omega^4 = 0$$

とならなければならない。これは、 α^2 の二次方程式と見ることができ、簡単に解くことが出来て

$$\alpha^2 = \frac{(3 \pm \sqrt{5})\omega^2}{2} \quad (2.12)$$

となることが分かる。ここから、おもりの運動は、角振動数の大きさ（大きさなので $\alpha > 0$ の場合を取って考えるが、 α としては、正と負のものがある。）が

$$\alpha = \sqrt{\frac{(3 \pm \sqrt{5})\omega^2}{2}}$$

の二種類があるということがわかる。もちろん、実際の動きは、（運動方程式が線型なので）これらの振動の重ね合わせになっている。

このように、連成振動では、いくつかの角振動数の振動が組み合わされた運動が見られる。それぞれの角振動数の振動を、「モード」という。二つのおもりがばねでつながった系では、2つの角振動数の値が出てきたので、モードの数は2つである。

さて、それぞれのモードにおける、おもりの動きはどうなっているだろうか。これは、今求まったそれぞれのモードの角振動数を、式(2.10)に代入すると見えてくる。

まず、

$$\alpha = \sqrt{\frac{(3 + \sqrt{5})\omega^2}{2}}$$

のモードについては式(2.10)は

$$\begin{pmatrix} \frac{(1 - \sqrt{5})\omega^2}{2} & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \frac{(-1 - \sqrt{5})\omega^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.13)$$

となるので、それぞれのおもりの振動の振幅 A_1 と A_2 の間に

$$A_2 = \frac{(1 - \sqrt{5})}{2} A_1 \quad (2.15)$$

と言う関係があることが分かる。

同様にして、

$$\alpha = \sqrt{\frac{(3 - \sqrt{5})\omega^2}{2}}$$

のモードについては式(2.10)は

$$\begin{pmatrix} \frac{(1 + \sqrt{5})\omega^2}{2} & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \frac{(-1 + \sqrt{5})\omega^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.13)$$

となるので、それぞれのおもりの振動の振幅 A_1 と A_2 の間に

$$A_2 = \frac{(1 + \sqrt{5})}{2} A_1 \quad (2.15)$$

と言う関係があることが分かる。

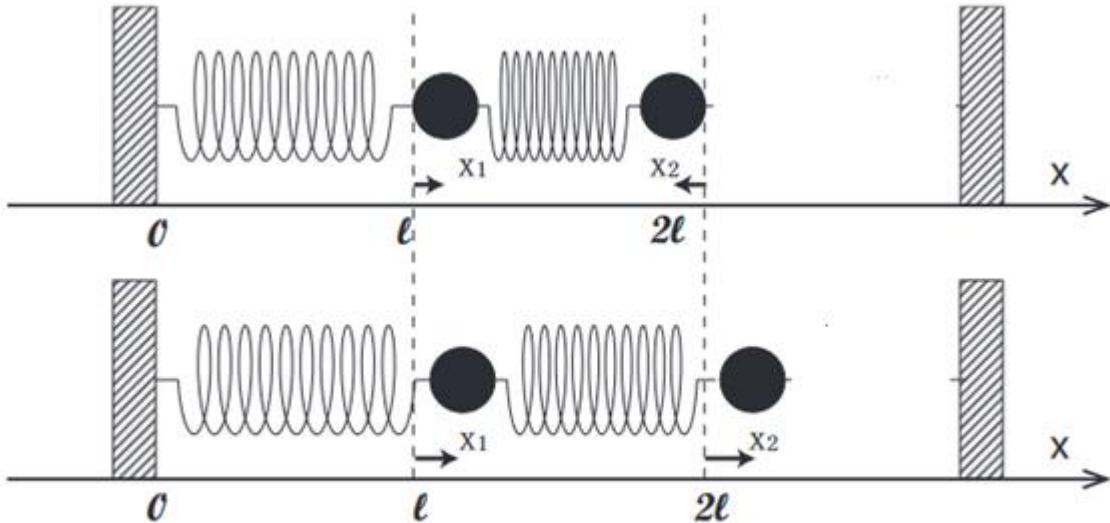


図 2.2 二つのおもりの連成振動のモード。

上は、 $\alpha = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})\omega^2}{2}}$ の場合、下は $\alpha = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})\omega^2}{2}}$ の場合。

さて、ここで、ここまでで求まらなかったパラメータと初期条件の間の関係を整理しておこう。

角振動数として、 $\alpha = \pm \sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})\omega^2}{2}}$ と $\alpha = \pm \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})\omega^2}{2}}$ の二種類が出てきたので、左側のおもりのズレは、係数 A_1, B_1, C_1, D_1 を用いて

$$x_1(t) = A_1 \exp(i \sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}} \omega t) + B_1 \exp(-i \sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}} \omega t) + C_1 \exp(i \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})}{2}} \omega t) + D_1 \exp(-i \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})}{2}} \omega t) \quad (2.17)$$

と書ける。 x_2 も同様なので、その運動には $A_2 \sim D_2$ の 4 つの係数が付き、計 8 個のパラメータが必要になる。しかし、今、

$$A_2 = \frac{(1 - \sqrt{5})}{2} A_1, \quad B_2 = \frac{(1 - \sqrt{5})}{2} B_1, \quad C_2 = \frac{(1 + \sqrt{5})}{2} C_1, \quad D_2 = \frac{(1 + \sqrt{5})}{2} D_1$$

$$x_2(t) = A_2 \exp(i \sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}} \omega t) + B_2 \exp(-i \sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}} \omega t) + C_2 \exp(i \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})}{2}} \omega t) + D_2 \exp(-i \sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})}{2}} \omega t)$$

などの関係があることが分かったので、真に決めなければいけないパラメータは 4 つである。この 4 つが、「左側のおもりの位置と速度」、および「右側のおもりの位置と速度」という、計 4 つの初期条件から過不足無く決められることがわかる

$$x_1(0) = A_1 + B_1 + C_1 + D_1 = \ell/2$$

$$x'_1(0) = i\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}}\omega A_1 - i\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}}\omega B_1 + i\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})}{2}}\omega C_1 - i\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})}{2}}\omega D_1 = 0$$

$$x_2(0) = A_2 + B_2 + C_2 + D_2 = \frac{(1-\sqrt{5})}{2}A_1 + \frac{(1-\sqrt{5})}{2}B_1 + \frac{(1+\sqrt{5})}{2}C_1 + \frac{(1+\sqrt{5})}{2}D_1 = 0$$

$$x'_2(0) = i\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}}\omega\frac{(1-\sqrt{5})}{2}A_1 - i\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}}\omega\frac{(1-\sqrt{5})}{2}B_1 + i\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})}{2}}\omega\frac{(1+\sqrt{5})}{2}C_1$$

$$-i\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})}{2}}\omega\frac{(1+\sqrt{5})}{2}D_1 = 0$$

これから、

$$A_1 = B_1 = \frac{(1+\sqrt{5})}{8\sqrt{5}}\ell$$

$$C_1 = D_1 = \frac{-(1-\sqrt{5})}{8\sqrt{5}}\ell$$

$$A_2 = B_2 = \frac{(1-\sqrt{5})}{2}\frac{(1+\sqrt{5})}{8\sqrt{5}}\ell = \frac{-1}{4\sqrt{5}}\ell$$

$$C_2 = D_2 = \frac{-(1+\sqrt{5})}{2}\frac{(1-\sqrt{5})}{8\sqrt{5}}\ell = \frac{1}{4\sqrt{5}}\ell$$

より、

$$x_1(t) = \frac{(1+\sqrt{5})}{4\sqrt{5}}\ell \left(\cos\left(\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}}\omega t\right) \right) + \frac{-(1-\sqrt{5})}{4\sqrt{5}}\ell \left(\cos\left(\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})}{2}}\omega t\right) \right)$$

$$x_2(t) = \frac{-1}{2\sqrt{5}}\ell \left(\cos\left(\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}}\omega t\right) \right) + \frac{1}{2\sqrt{5}}\ell \left(\cos\left(\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})}{2}}\omega t\right) \right)$$

を得る。

同じ周期の振動について考える。

$$\frac{-1}{2\sqrt{5}}\ell \left(\cos\left(\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}}\omega t\right) \right) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\ell \left(\cos\left(\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}}\omega t - \pi\right) \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}\ell \left(\cos\left(\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}}\omega(t - \pi/\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}}\omega)\right) \right)$$

ここで、山の頂上に注目すれば、時間が $\pi/(\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}}\omega)$ 経った時に、山が ℓ だけ右に進んだように見える。

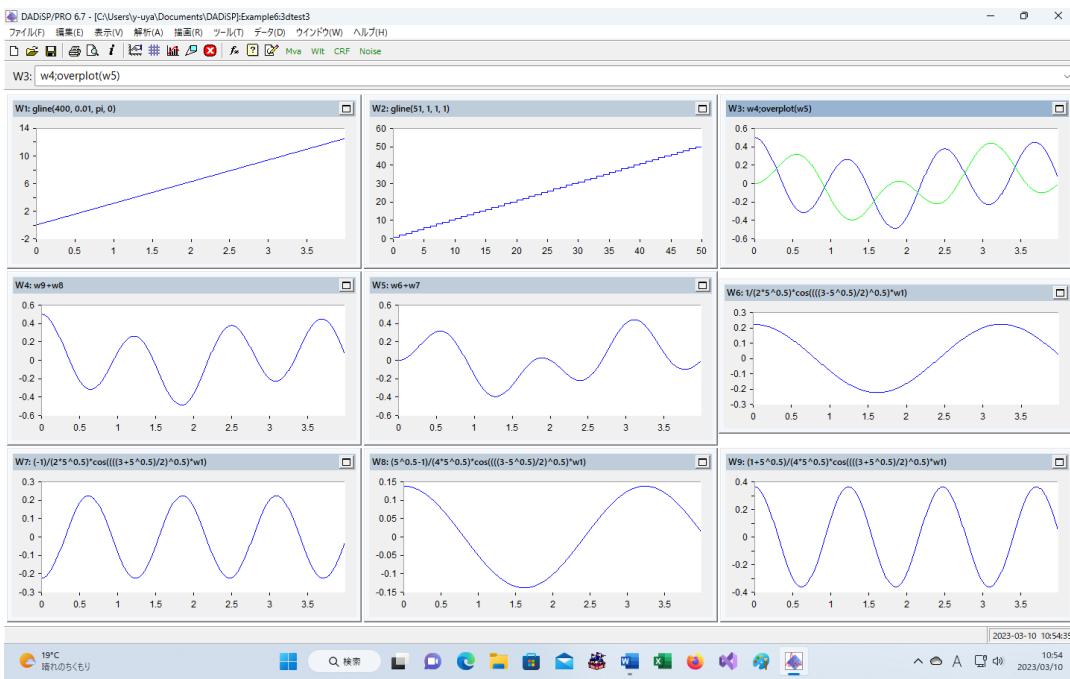
波の速度は、 $(\ell/\pi) (\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})k}{2m}})$ k が大きい（堅いばね）と速い。 m が小さい（軽い）と速い。

左から、右に進んだように解釈できる。（谷が左に進んだとも言えるが、振幅が減少する方を選んだ。）

$$\frac{-(1-\sqrt{5})}{4\sqrt{5}} \ell(\cos\left(\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})}{2}} \omega t\right))$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \ell(\cos\left(\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})}{2}} \omega t\right))$$

これは、同じ位相のゆっくりした振動。



右端の動きが小さい。

$$x''_1(t) = -\left(\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}} \omega\right)^2 \frac{(1+\sqrt{5})}{4\sqrt{5}} \ell\left(\cos\left(\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}} \omega t\right)\right) - \left(\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})}{2}} \omega\right)^2 \frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}} \ell(\cos\left(\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})}{2}} \omega t\right))$$

$$x''_2(t) = \left(\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}} \omega\right)^2 \frac{1}{2\sqrt{5}} \ell\left(\cos\left(\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}} \omega t\right)\right) - \left(\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})}{2}} \omega\right)^2 \frac{1}{2\sqrt{5}} \ell(\cos\left(\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})}{2}} \omega t\right))$$

なので、

$$x''_1(0) = -\left(\left(\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}}\right)^2 \frac{(1+\sqrt{5})}{4\sqrt{5}} + \left(\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})}{2}}\right)^2 \frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{5}}\right) \omega^2 \ell = \omega^2 \ell$$

$$x''_2(0) = \left(\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})}{2}} \omega\right)^2 \frac{1}{2\sqrt{5}} \ell - \left(\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})}{2}} \omega\right)^2 \frac{1}{2\sqrt{5}} \ell = \frac{1}{2} \omega^2 \ell$$

手を離した直後は、x1 は左に、x2 は右に動きます。

2.2 多自由度の連成振動

次に、さらにたくさんのおもりがばねにつながっている場合を考えよう。固定された壁の間に、N 個の質量 m のおもりが、ばね定数 k のばねにつながれてつながっているものとする。ばねの自然長を ℓ とした時、全部のばねの数は N 本で、壁の間の距離は $(N+1)\ell$ と表される。

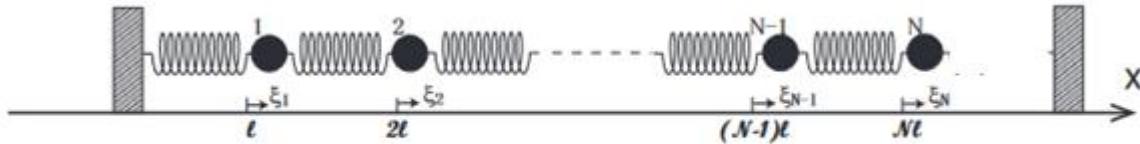


図 2.3 N 個のおもりの連成振動

おもりには、左から順番に 1; 2; 3; と番号を付けておく。全てのばねが自然長の状態にある時の位置を基準とし、 n 番目のおもりの、時刻 t における基準の位置からのずれを $\xi_n(t)$ とする。ここで、式を立てる際の都合で、左側の壁をゼロ番目のおもり、壁が動かない条件を「 $\xi_0 = \xi_{(N+1)} = 0$ が常に成り立つ」としておくと良い。 n 番目のおもりにかかる力を考える。このおもりの左側のばねの伸びは ξ_n 。 $n < (N-1)$ の場合は、

$$-k(\xi_n - \xi_{n-1}) + k(\xi_{n+1} - \xi_n) = k\xi_{n+1} - 2k\xi_n + k\xi_{n-1} \quad (2.18)$$

と表される。したがって、 n 番目のおもりの運動方程式は

$$m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = k\xi_{n+1} - 2k\xi_n + k\xi_{n-1} \quad (2.19)$$

であり、一つのばねにつながれたおもりの角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ を用いれば

$$\frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = \omega^2(\xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1}) \quad (2.20)$$

が成立する。

$n=N$ の場合には、 $n=N$ 番目のおもりにかかる力は、

$$-k(\xi_N - \xi_{N-1})$$

となり、 N 番目のおもりの運動方程式は

$$\frac{d^2 \xi_N}{dt^2} = -\omega^2(\xi_N - \xi_{N-1})$$

となる。

となる。この式が、 $n = 1, 2, \dots, N$ について成り立つので、これは、 N 元の連立微分方程式となっている。おもりのずれを縦に並べたベクトル

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

を用いると、

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \vdots \\ \xi_{N-1} \\ \xi_N \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \vdots \\ \xi_{N-1} \\ \xi_N \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

と書ける。

さて、この振動の様子がどのようになるかを調べるために、

$$\xi_n(t) = A_n e^{i\alpha t} \quad (2.23)$$

という形の解を仮定してみよう。この時、式 (2.22) は

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 - 2\omega^2 & \omega^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \omega^2 & \alpha^2 - 2\omega^2 & \omega^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & \alpha^2 - 2\omega^2 & \omega^2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & \alpha^2 - 2\omega^2 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha^2 - 2\omega^2 & \omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega^2 & \alpha^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ \vdots \\ A_{N-1} \\ A_N \end{pmatrix} = 0 \quad (2.24)$$

となる。 (A_1, A_2, \dots, A_N) についてゼロでない解を求めるために、左辺の係数の行列の行列式がゼロになるような α の値を求め、その時の (A_1, A_2, \dots, A_N) を求めれば良い。この計算は非常に大変なので、ここでは結果のみを記す。この結果をもとの式に代入し、成立していることを確かめておこう。また、2.3 節に、具体的な解法を示しているので、参考にしてほしい*1。

三重対角行列の特性多項式を求める漸化式を 求めてみます.

まず、三重対角行列を A とします。

$$A = \omega^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ですが、

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

と書きます。

単位行列を I として、この行列の特性多項式を求めます。つまり、 $|\lambda I - A|$ を求めます。縦線での括弧は、行列式を表します。 $f_n(\lambda)$ を次のように定義します。

$$f_n(\lambda) \equiv \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_1 & -\beta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\gamma_1 & \lambda - \alpha_2 & -\beta_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_2 & \lambda - \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda - \alpha_{n-1} & -\beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\gamma_{n-1} & \lambda - \alpha_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

すると、一番下の行(横ベクトル)のラプラス展開によって、次のような漸化式が得られます。

$$\begin{aligned}
f_n(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_1 & -\beta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\gamma_1 & \lambda - \alpha_2 & -\beta_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_2 & \lambda - \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda - \alpha_{n-1} & -\beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\gamma_{n-1} & \lambda - \alpha_n \end{pmatrix} \\
&= (\lambda - \alpha_n)f_{n-1} - (-\gamma_{n-1}) \det \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_1 & -\beta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\gamma_1 & \lambda - \alpha_2 & -\beta_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_2 & \lambda - \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda - \alpha_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\gamma_{n-2} & -\beta_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3}
\end{aligned}$$

ここで、最後の式で第二項は、最後の列(縦ベクトル)で展開すると、 f_{n-2} と $-\beta_{n-1}$ の積で表現できます。

$$f_n(\lambda) = (\lambda - \alpha_n)f_{n-1} - \beta_{n-1}\gamma_{n-1}f_{n-2} \tag{4}$$

こうして、うまく漸化式が立てられました。元の行列で確認すると、

$$f_n = (\lambda - \omega^2)f_{n-1} - \omega^4 f_{n-2}$$

$$f_{n-1} = (\lambda - 2\omega^2)f_{n-2} - \omega^4 f_{n-3}$$

$$f_{n-2} = (\lambda - 2\omega^2)f_{n-3} - \omega^4 f_{n-4}$$

$$f_3 = (\lambda - 2\omega^2)f_2 - \omega^4 f_1$$

$$f_2 = (\lambda - 2\omega^2)f_1 - \omega^4 f_0$$

$$f_1 = (\lambda - 2\omega^2)f_0$$

$$f_0 = 1$$

中央のグループは、

$$f_{n-1} - (\lambda - 2\omega^2)f_{n-2} + \omega^4 f_{n-3} = 0$$

の形をしている。2次方程式

$$x^2 - (\lambda - 2\omega^2)x + \omega^4 = 0$$

の解を、 k_{\pm} とおくと、解と係数の関係から、

$$k_+ + k_- = (\lambda - 2\omega^2)$$

$$k_+ * k_- = \omega^4$$

となるので、

$$\begin{aligned}
& f_{n-1} - (\lambda - 2\omega^2)f_{n-2} + \omega^4 f_{n-3} \\
&= f_{n-1} - (k_+ + k_-)f_{n-2} + k_+ * k_- f_{n-3} = 0 \\
&\quad 0
\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}
f_{n-1} - (k_+)f_{n-2} &= +(k_-)(f_{n-2} - k_+ f_{n-3}) \\
f_{n-1} - (k_-)f_{n-2} &= +(k_+)(f_{n-2} - k_- f_{n-3})
\end{aligned}$$

を得る。

最初に、

$$f_{n-1} - (k_+)f_{n-2} = +(k_-)(f_{n-2} - k_+ f_{n-3})$$

の場合が

$$f_2 - (k_+)f_1 = +(k_-)(f_1 - k_+ f_0)$$

まで続くので、

$$f_{n-1} - (k_+)f_{n-2} = +((k_-)^{n-2})(f_1 - k_+ f_0) = +((k_-)^{n-2})((\lambda - 2\omega^2)f_0 - k_+ f_0)$$

同様にして、

$$f_{n-1} - (k_-)f_{n-2} = +(k_+)(f_{n-2} - k_- f_{n-3})$$

の場合には、

$$f_{n-1} - (k_-)f_{n-2} = +((k_+)^{n-2})(f_1 - k_- f_0) = +((k_+)^{n-2})((\lambda - 2\omega^2)f_0 - k_- f_0)$$

となる。

これから、

$$f_{n-1} = (((k_-)^{n-1})((\lambda - 2\omega^2)f_0 - k_+ f_0) - ((k_+)^{n-1})((\lambda - 2\omega^2)f_0 - k_- f_0))/(k_- - k_+)$$

を得る。

$$\begin{aligned}
f_n &= (\lambda - \omega^2)f_{n-1} - \omega^4 f_{n-2} \\
&= \frac{(\lambda - \omega^2)((k_-)^{n-1})((\lambda - 2\omega^2) - k_+) - ((k_+)^{n-1})((\lambda - 2\omega^2) - k_-)}{k_- - k_+} \\
&\quad - \frac{\omega^4 ((k_-)^{n-2})((\lambda - 2\omega^2) - k_+) - ((k_+)^{n-2})((\lambda - 2\omega^2) - k_-)}{k_- - k_+} \\
&\quad (n \geq 2)
\end{aligned}$$

$$f_n = 0$$

$$k_{\pm} = \frac{(\lambda - 2\omega^2) \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2\lambda}}{2}$$

とすれば、 $n = 2$ のときの λ は、前の場合の α^2 と同じになる。

となる。したがって、 $D_N = 0$ となる条件は、 r が 1 でない 1 の $N + 1$ 乗根であることである。すなわち

$$r = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}} = \exp \left[i \frac{2\pi j}{N+1} \right] \quad (2.43)$$

である。ただし、ここに $j = 1, 2, \dots, N$ である。これを、 λ について解けば、 j 番目のモードに対する固有値 λ_j として

$$\lambda_j = 2 \cos \left(\frac{\pi j}{N+1} \right) \quad (2.44)$$

を得る。また、 λ_j に対する固有ベクトルを $\vec{x}_j = (x_{j,1}, x_{j,2}, \dots, x_{j,N})^T$ とすると

$$T(0, 1)\vec{x}_j = \lambda_j \vec{x}_j \quad (2.45)$$

より

$$x_{j,i-1} + x_{j,i+1} = 2 \cos \left(\frac{\pi j}{N+1} \right) x_{j,i} \quad (2.46)$$

となる。これを、 $x_{j,i}$ に関する三項間漸化式として解いていく。漸化式の特性方程式を解くことにより、

$$x_{j,n+1} - \exp \left(\pm i \frac{\pi j}{N+1} \right) x_{j,n} = \exp \left(\mp i \frac{\pi j}{N+1} n \right) \left[x_{j,n} - \exp \left(\pm i \frac{\pi j}{N+1} \right) x_{j,n-1} \right] \quad (2.47)$$

が得られ（虚数単位と区別するため、漸化式の項のラベルをいったん i から n に変えた）、

$$x_{j,n+1} - \exp \left(\pm i \frac{\pi j}{N+1} \right) x_{j,n} = \exp \left(\mp i \frac{\pi j}{N+1} n \right) \left[x_{j,1} - \exp \left(\pm i \frac{\pi j}{N+1} \right) x_{j,0} \right] \quad (2.48)$$

を得る。端が壁に固定されているという境界条件より、 $x_{j,0} = 0$ であることに注意して、

$$x_{j,n+1} - \exp \left(i \frac{\pi j}{N+1} \right) x_{j,n} = \exp \left(-i \frac{\pi j}{N+1} n \right) x_{j,1} \quad (2.49)$$

$$x_{j,n+1} - \exp \left(-i \frac{\pi j}{N+1} \right) x_{j,n} = \exp \left(i \frac{\pi j}{N+1} n \right) x_{j,1} \quad (2.50)$$

となるから、ここから

$$x_{j,n} = \frac{\sin(\pi j n / (N+1))}{\sin(\pi j / (N+1))} x_{j,1} \quad (2.51)$$

となる。これで、 $x_{N+1} = 0$ という、ばねがもう一方の壁に固定されているという境界条件も満たされる。 $x_{j,1}$ は、全体の規格化として、任意に取って良いので、適当な定数 C

を用いて

$$x_{j,1} = C \sin \left(\frac{\pi j}{N+1} \right) \quad (2.52)$$

と取り直して、

$$x_{j,i} = C \sin \left(\frac{\pi ji}{N+1} \right) \quad (2.53)$$

を得る。ただし、最後の式では、 i は $i = 1, 2, \dots, N$ を表す。

第3章

連成振動の連續極限と波動方程式

3.1 連成振動の連續極限

簡単のため、前章から引き続き、 x 方向の一次元的な連成振動を考える。全体として、長さが L の空間の中に、 N 個の質量 m のおもりが、ばね定数 k のばねでつながれているものとする。ばねの自然長 l は

$$l = \frac{L}{N+1} \quad (3.1)$$

であり、全てのばねが自然長であるとき、左から n 番目のおもりの位置 x_n は

$$x_n = nl \quad (3.2)$$

と表される。 n 番目のおもりの、時刻 t における、この位置からのずれを ξ_n とすると、おもりの運動方程式は

$$m \frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = -k(\xi_n - \xi_{n-1}) + k(\xi_{n+1} - \xi_n) \quad (3.3)$$

と表される。この式を変形して

$$\frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = c^2 \left[\frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{l} - \frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{l} \right] \frac{1}{l} \quad (3.4)$$

と書く。ただし、ここで

$$c^2 = \frac{kl^2}{m} \quad (3.5)$$

と置いた。

ここで、おもりが非常に多い極限を考えよう。全体の長さが決まっているので、おもりを多くするということは、その分、おもり同士の間隔が小さくなる。つまり、この極限は、

l を小さくするという極限と等価である。 n 番目のおもりに注目する。ばねの伸びがあまり大きくないとすれば、このおもりの位置は、全てのばねが自然長の状態の時からあまり変化していないとして良い。そこで、このおもりの位置のずれを、おもりのもともとの位置 x_n の関数を見て

$$\xi_n(t) \rightarrow \xi(t, x_n) \quad (3.6)$$

と書くことにする。この時、式(3.4)の右辺のカッコの中に出でてくる、 $\frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{l}$ の部分を

$$\frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{l} = \frac{\xi(t, x_n + l) - \xi(t, x_n)}{l} \quad (3.7)$$

と書くことができる。この部分を、 $l \rightarrow 0$ とする極限を取れば、微分の定義により

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\xi(t, x_n + l) - \xi(t, x_n)}{l} = \frac{\partial \xi}{\partial x}(t, x = x_n) \quad (3.8)$$

となる。ここで、微分が t に関するものではなく、おもりの位置に関するものであることをはっきりさせるために、偏微分の記号を用いている。同様に、カッコの中の第二項については

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\xi(t, x_{n-1} + l) - \xi(t, x_{n-1})}{l} = \frac{\partial \xi}{\partial x}(t, x = x_{n-1}) \quad (3.9)$$

と書ける。そこで、式(3.4)の右辺（の c^2 を除いた部分）は

$$\left[\frac{\partial \xi}{\partial x}(t, x_n) - \frac{\partial \xi}{\partial x}(t, x_{n-1}) \right] \frac{1}{l} \quad (3.10)$$

となる。さらに、これは

$$\left[\frac{\partial \xi}{\partial x}(t, x_{n-1} + l) - \frac{\partial \xi}{\partial x}(t, x_{n-1}) \right] \frac{1}{l} \quad (3.11)$$

と書けるので、ここで、再び $l \rightarrow 0$ の極限を考えると、 $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ をもう一度 x で微分することになり

$$\lim_{l \rightarrow 0} \left[\frac{\partial \xi}{\partial x}(t, x_{n-1} + l) - \frac{\partial \xi}{\partial x}(t, x_{n-1}) \right] \frac{1}{l} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(t, x_{n-1}) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(t, x_n - l) \quad (3.12)$$

と計算できて、結局、この部分が

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}(t, x) \quad (3.13)$$

と書けることになる。ここで、 $l \rightarrow 0$ の極限を取ることから、「おもり」が連続的に分布しているものとし、引数を x_n から、位置座標 x に変えた。

式(3.4)の左辺は、時間に関する偏微分に書きかえられて、結局、「おもり」の位置の変化 $\xi(t, x)$ について

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (3.14)$$

という、時間二階、空間二階の偏微分方程式が得られることになる。この形の方程式を、波動方程式という。

ここで、重要な注意として、式(4.1)を導くにあたり、

$$c^2 = \frac{kl^2}{m} \quad (3.15)$$

の部分にある l についての極限を取っていなかった。これは、実際の固体などの系に連成振動のモデルを適用する際、 c^2 の値が一定であるとすることが自然だからである。すなわち、 $l \rightarrow 0$ と同時に、 $m \rightarrow 0$ および $k \rightarrow \infty$ の極限が取られ、全体として c^2 が一定に保たれると考えることが、物理的に正当化されるのである。そこで、具体的に固体にこのモデルを適用するにあたって、どのようなことに注意しなければならないか、ということを、次節で議論しよう。

3.2 固体のモデル

固体は、物質を構成する原子がぎっしりと並び、隣の原子と押し合いをしているような状態であると考えられる。隣の原子に近づくと反発されて押し戻される。この状況は、固体を構成する原子を無数の「おもり」とし、隣の原子と「ばね」でつながれている状態として模擬することができる。つまり、無数の連成振動子が並んだ状態だと考えられ、前節で示した波動方程式を適用することができる。しかし、実際の固体の性質と、「ばね+おもり」をどのように関連付けるべきなのだろうか。

まず、多くの物質は「ばね」のように、形が変わると元に戻そうとする力が働く、という性質を持っているということに着目しよう。これは、弾性と呼ばれる。弾性にも、変形のさせ方や力の働く方向によって色々と種類があるが、ここでは、ある棒状の物体を引っ張り、その方向に物体を伸ばそうとするような場合について考えよう。物体の断面積を S とし、物体の物体の断面に垂直に、力 F を掛けたものとする。この時、長さ L だった物体が、長さ $L + \Delta L$ になったとする。引っ張った長さ ΔL とかけた力 F の間には、変形が小さければ、比例関係があり

$$F = K \Delta L \quad (3.16)$$

と書ける。ここで、 K は、考えている固体を「大きなばね」とみなした時のばね定数とみ

なす。この K が、固体の堅さを表す量であり、 K が大きければ、同じ変形を引き起こすのにも、より強い力が必要になるということだから、より「堅い」物体だということができる。

しかし、通常、この K の値を、物体の堅さを表す量としては使わない。まず、かけた力 F については、断面積で割って、「単位面積あたり」の力（この力を応力という） $\sigma = \frac{F}{S}$ で表す。また、長さの変化 ΔL については、もとの長さ L で割って、変形の割合（ひずみ）という形にして $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$ という量を用いる。そこで、上の法則を応力とひずみの間の関係に書き直すと

$$\sigma S = KL\epsilon \quad (3.17)$$

より

$$\sigma = E\epsilon \quad (3.18)$$

と書ける。ここで、ヤング率 E [N/m²] を

$$E = \frac{KL}{S} \quad (3.19)$$

として、導入した。

現実の材料において、測定量はヤング率である。そこで、現実の物体を表現するモデルとして連成振動の連続極限を使うのであれば、連成振動の中で出てくる「ばね定数 k 」、「おもりの質量 m 」、「ばねの自然長 l 」を、現実の物体の物性と合わせられるような形で極限を取らなければならない。これらは、あくまでも、固体を構成する原子・分子レベルの力を、「ばねとおもり」とみなしたものであり、簡単に測定可能な量ではない。

まず、自然長 l については、おもりの数を増やしても、現実の物体の大きさが変わらないようにしなければならない。つまり $L = Nl$ を一定にした上で、 $N \rightarrow \infty$ の極限をとる必要がある。したがって、ばねの自然長 l は、モデルで使うおもりの個数 N によって、 $l \propto 1/N$ のように変わる。

次に、質量 m は、おもりの質量である。おもりを全て足すと、現実の物体の質量 M になるべきであり、 $M = Nm$ を一定とすべきである。つまり、たくさんのおもりを考えるほど、一つあたりのおもりの重さは小さくなり、 $m \propto 1/N$ のように変化する。また、物体の質量は、物体の密度 ρ を用いて表現されることも多い。今の場合、 $M = \rho LS$ となる。物体の断面積は、棒が伸びても変わらないとする⁴¹。

最後に、ばね定数 k について、考えてみよう。今回議論したモデルは、たくさんのはねを直列につないでいる。この系に力 F を加えたとき、作用・反作用によって、個々の

⁴¹ これは、あまり正確ではないが、議論を簡単にするための方便である。

ばねに同じだけの外力が働いているように見える。しかし、一つあたりのばねの伸びは、 L/N である。そこで、個々のばねのばね定数は、 $k = \frac{F}{L/N} = \frac{F}{L}N = KN$ とみなせる。 N が大きくなるにつれて、一つ一つのばねの強さは強くなっていく（その分、たくさんのはねが直列で並ぶ。直列にはねを繋げると、実行的なばね定数は小さくなるので、両方を考えると、全体としてのばね定数の値は有限になる）。

以上の考察をもとに、連成振動の連続極限から、式 (4.1) を導くにあたって、 c^2 の値が一定に保たれなければならないことを示そう。ばねとおもりのモデルでは

$$c^2 = \frac{kl^2}{m} \quad (3.20)$$

であったが、 k, l, m について、系全体としての量と、それぞれ $k = KN, l = L/N, m = M/N = \rho LS/N$ 、によって関係していることを用いれば

$$c^2 = \frac{KN(L/N)^2}{\rho LS/N} = \frac{KL}{\rho S} \quad (3.21)$$

となり、結局、 c^2 は N に依存しないことが分かるだろう。さらに、測定可能量であるヤング率 E が、全体としてのばね定数 K と、 $E = KL/S$ の関係にあったから、結局、 c^2 は

$$c^2 = \frac{E}{\rho} \quad (3.22)$$

と、全て測定可能な量で書くことが出来る。

3.3 固有振動数

$N \rightarrow \infty$ の極限をとった状態で、連成振動の振動数 α_j はどうなるかを調べておこう。

$$\alpha_j = 2\omega \sin\left(\frac{\pi j}{2(N+1)}\right) \quad (3.23)$$

であった。ここで、 j を固定して考えれば、サインの中身は、 $N \rightarrow \infty$ とした時、非常に小さくなる。そこで、 $\epsilon \ll 1$ の時のサイン関数の近似式

$$\sin(\epsilon) \sim \epsilon \quad (3.24)$$

を用いると、振動数は

$$\alpha_j \sim 2\omega \frac{\pi j}{2(N+1)} = \omega \frac{\pi j}{N+1} \quad (3.25)$$

と近似できる。ここで、 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ であるが、前節の議論より

$$m \sim \frac{M}{N}, \quad k \sim KN \quad (3.26)$$

と考えられるので

$$\omega \sim \sqrt{\frac{KN}{M/N}} = N\sqrt{\frac{K}{M}} \quad (3.27)$$

となる。そこで、 $N \rightarrow \infty$ の極限では

$$\alpha_j \sim N\sqrt{\frac{K}{M}} \frac{\pi j}{N+1} \sim \pi j \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (3.28)$$

となる。右辺の $\sqrt{K/M}$ の項は、 $M = \rho LS$ と、ヤング率 $E = KL/S$ を用いれば

$$\sqrt{\frac{K}{M}} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{KL}{\rho S}} = \frac{c}{L} \quad (3.29)$$

と、波動方程式に現れる係数 $c = \sqrt{E/\rho}$ と、棒の長さ L を用いて表されるから

$$\alpha_j = \frac{\pi j}{L} c \quad (3.30)$$

と書ける。右辺の $\pi j/L$ という項は、両端を固定された弦の定在波の波数 k_j (次章参照) に一致する。つまり、ここから、角振動数と波数の間の関係

$$\alpha_j = ck_j \quad (3.31)$$

を導けたことになる。

7.2 弦の振動

7.2.1 弦の振動と空気

音は粗密波です。空気圧が高くなったり低くなったりしなくてはなりません。そこで、ギターの弦を変形して考えてみます。弦の断面は丸いのですが、少し修正して断面が $1\text{mm} \times 1\text{mm}$ の正方形だとします。



長さ 50cm の四角い弦の上下にある 2 つの高さ 10cm の空気を考えます。考える気体は $0.001\text{m} \times 0.1\text{m} \times 0.5\text{m} = 0.00005\text{ m}^3$ が上下に 2 つです。

側面と天井に壁を作って、空気が出入りできないとします。

弦が 1cm 上がると、上の部分の容積は $0.001\text{m} \times 0.09\text{m} \times 0.5\text{m} = 0.000045\text{ m}^3$ 、下の部分の容積は、 $0.001\text{m} \times 0.11\text{m} \times 0.5\text{m} = 0.000055\text{ m}^3$ となり、上は圧縮され、下は膨張します。

空気の粒子の大きさは、分子のサイズとしては、酸素や窒素は 4\AA 程度で、酸素や窒素は分子同士が結合する力は小さく、常温常压でガスとして存在します。

1\AA は 10^{-10}メートル です。 1mm は 10^{-3} の 10^7 倍です。 10000000 倍です。

地球の半径が約 6400km なので、大円の半周は $3.14 \times 6400000\text{m} = 2 \times 10^7\text{m}$ 身長 2m の人間から見たら身長の 10^7 倍です。

4 オングストロームの空気の分子から見たら、弦の幅は、 $10^{-3} / (4 \times 10^{-10}) = 0.25 \times 10^7$ 倍です。分子から見れば、逃げる暇もなく巨大な地面が上昇してくるのと同じです。

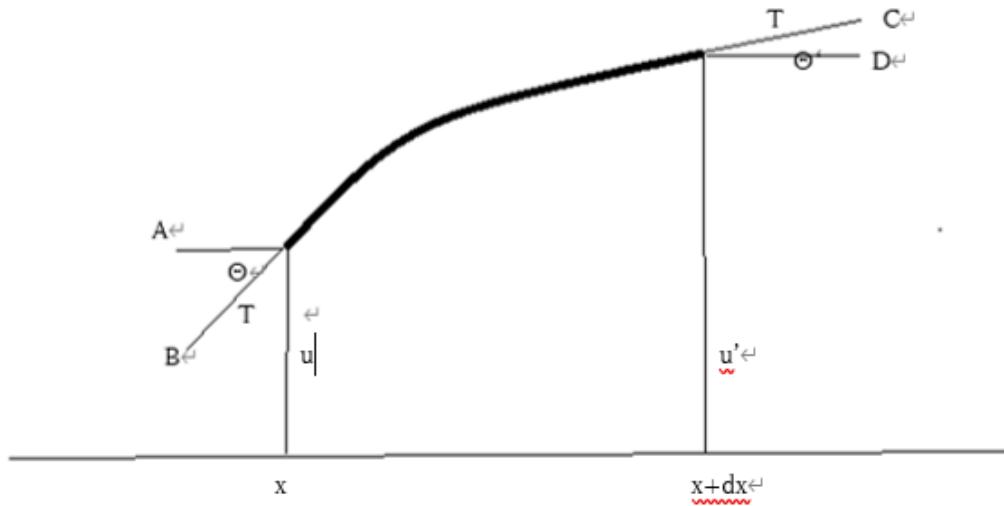
断面の半径が 1mm の弦の場合は、 4\AA の分子にとって、半径 1mm は $0.001 / 4 \times 10^{-10} = 0.25 \times 10^7$ 倍です。

身長 2m の人にとって地球の半径は、 $6400000 / 2 = 0.32 \times 10^7$ 倍です。弦が丸かったとしても、その弦の上にいる分子にとっての弦の運動は、身長 2m の人間に対する地面の運動と同じようなものです。

弦が下に移動するときも一緒です。弦の振動に合わせて、空気の圧縮と膨張が起こります。

ギターには弦を囲む壁も蓋もないのですが、空気の粒子と弦の太さの割合や、下から押されても上が詰まつていれば空気の粒はぎゅうぎゅう詰めとなり圧縮されます。弦が急に下がれば、気圧が急激に低下し、疎な状態が弦の上面で起きます。この疎な状態を平均化するように空気は動くでしょう。弦に押されて上に行った空気の粒子は、弦が下がれば気圧が減って、下がって行く弦の方に向かって移動するでしょう。その後、また弦が上昇します。以下繰り返します。

弦の運動は、



上の図を使って考えることができます。太い部分を弦の微小部分とします。弦の張力 T は接線方向に働く力であり、この図では、右上に引っ張る力と、左下に引っ張る力として作用します。

T を分解したときの垂直成分は座標が x のときには下向きで、 $-T \sin\theta$ 、座標が $x+dx$ のときには上向きで

$T \sin\theta'$ 、です。

Θ が小さければ、 $\Theta = \sin\Theta = \tan\Theta$ と見ても構わない。 $\tan\Theta$ はベクトル T の傾きであり、点 x における曲線に対する傾きに $-$ 符号をつけたものです。弦の形が、 $y = u(x)$ となっているときは、

$$-T \sin\theta = -T \tan\theta = -T \frac{\partial u}{\partial x}$$

となります。点 $x+dx$ では $T \sin\theta' = T \frac{\partial u}{\partial x}$ 、です。ただし、 x で偏微分するときの場所が異なります。

さて、上の図を左右から圧縮して、曲線が粒のようになったと考えれば、その粒に対して上下方向に働く力は

$$-T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x + T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_x dx$$

粒の質量は、線密度を ρ として、 $\rho d x$ 、加速度を

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

とすれば、弦の運動方程式は、

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_x dx$$

すなわち、

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

を得ます。これは、弦の上下運動を規定する方程式です。

解き方はいろいろですが、解を、 $u = e^{i(\omega t+kx)}$ と仮定して代入してみと、

$$-\rho\omega^2 e^{i(\omega t+kx)} = -Tk^2 e^{i(\omega t+kx)}$$

となって、

$$-\rho\omega^2/T = -k^2$$

を得ます。

$$k = \pm \sqrt{\rho\omega^2/T}$$

となる。これを満たせば解になるので、

$$u_1 = e^{i(\omega t+kx)}$$

も、

$$u_2 = e^{i(\omega t-kx)}$$

も解となります。

方程式が線形かつ斉次なので、上のような式の線形結合も解となりますので、

$$u = Ae^{i\omega t} \sin kx \text{ や、 } u = Be^{i\omega t} \cos kx$$

も解となるし、これらの線形結合で解が表現できます、そのうちで、境界条件を満たすものを見つけます。弦の長さを L として、両端では弦は動かないと言う条件を付ければ、

上の式では、B=0 となり、解は $u = Ae^{i\omega t} \sin kx$ の形になって、

境界条件から、 $kL = n\pi$ を得ますので、境界条件を満たす解は、

$$u = A_n e^{i\omega_n t} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\omega_n^2 = k^2 * \frac{T}{\rho} = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \frac{T}{\rho}$$

となるので、

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} * \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

方程式が線形なので、これらの解の重ね合わせも解となります。

$$n = 0 \text{ ならば、 } k = 0, \omega_n = 0$$

なので、 $u = 0$

$n=1$ の場合は、

$$u = A_1 e^{i\omega_1 t} \sin \frac{\pi}{L} x$$

であり、このうちの実部をとって考えれば、

$$u = A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} t\right) \sin\frac{\pi}{L} x$$

となって、中央が一番大きく振動して、1秒間の振動数fは $\frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ となります。

弦による空気の圧縮を考えると、この振動で発生する粗密波の振動数は、 $\frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ Hzです。

n = 2 の場合は、

$$u = A_n e^{i\omega_2 t} \sin\frac{2\pi}{L} x$$

となるので、x=L/2のときは、u = 0となり、中央部は動きません。

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{L} * \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

より、1秒間の振動数は、 $\frac{1}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ となるので、先ほどの2倍となります。

この振動が原因となる、粗密波は、先ほどの2倍の周波数を持つ音となります。

太鼓の場合は、もっと複雑ですが、太鼓の膜の物理的な特性で膜が振動して、粗密波が発生します。

風車の超低周波音の場合でも、固有振動数を重視すべきだと考えています。

ただし、タワーの中の気柱による共鳴を考えるときに、開口端補正をしても、気柱の長さが少し足りないのも事実です。

超低周波音の透過性を考えるときに、閉口部は、タワーの底にあるセメントの部分なのか、もっと下の岩盤なのかは、タワーの底部に騒音計と振動計を置いて計測して見なくては分かりません。精密騒音計が壊れるのが心配です。

$$\begin{bmatrix} \xi xx & \frac{1}{2}(\xi xy + \xi yx) & \frac{1}{2}(\xi xz + \xi zx) \\ \frac{1}{2}(\xi yx + \xi xy) & \xi yy & \frac{1}{2}(\xi yz + \xi zy) \\ \frac{1}{2}(\xi zx + \xi xz) & \frac{1}{2}(\xi zy + \xi yz) & \xi zz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \angle x \\ \angle y \\ \angle z \end{bmatrix}$$

$$= \Delta u_R + \Delta u_D$$

3.3.17

とおく。

$$\delta \int_{t1}^{t2} L dt = 0$$

が成立する。

理由は、

$$\frac{dp}{dV} V^\gamma + p\gamma V^{\gamma-1} = 0$$

$$dp = -p\gamma \frac{dV}{V}$$

この式と、

$$\angle p = -K \frac{\delta v}{v}$$

右に進んだように解釈できる。(谷が左に進んだとも言えるが、振幅が減少する方を選んだ。)

$$\frac{-(1-\sqrt{5})}{4\sqrt{5}} \ell(\cos\left(\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})}{2}} \omega t\right))$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \ell(\cos\left(\sqrt{\frac{(3-\sqrt{5})}{2}} \omega t\right))$$

∴

$$p_I(t, x) = P_i \sin(\omega t - k_1 x + \varphi_{0i}) + P_r \sin(\omega t + k_1 x + \varphi_{0r})$$

(まず、先端からの距離Xにおける曲げモーメント M_x を求める。 $l-a=b$ とおき、 $0 \leq X < b$ 、 $b \leq X \leq l$ に分けて考える。 $0 \leq X < b$ の場合、左要素の右断面におけるモーメントの釣り合いから $M_x = 0$ (これは、梁が質量を持たないとして

$$p(t, x) = f\left(t - \frac{x}{c} - \frac{y}{c} - \frac{z}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c} + \frac{y}{c} + \frac{z}{c}\right)$$

では、波の形が正弦波である理由は無い。同じ形の波が速度cで伝わるというだけである。

この波の形が、細くとがっていると音圧の変化が激しいということになり問題がおきえる。この形を考えるには、FFTでは高さの調査がなく、また同時に複数の地点で計測する様子も見られない。どうせ調べるなら、もっとちゃんとやってください。

1 ギターで音の出るしくみ

ギターの音のしくみ

ギターの音はどこから出るのでしょうか。ギターの弦が振動するので、その弦の周りの空気は振動します。しかし、弦は細く面積が小さいので、小さな音しか出ません。弦の周りで発生した音がギターの胴の中央部分の穴（サウンドホール）に入つて共鳴し、音が大きくなつて穴から出ると考えたくなりますが、それは間違いです。エネルギー保存の法則があり、穴の中に電気的な增幅装置が無ければ、大きな音のエネルギーになることはありません。

音は響板が出している

振動による音の発生エネルギーは、振動する物体の表面積に比例します。弦が振動すると、弦の下の端を

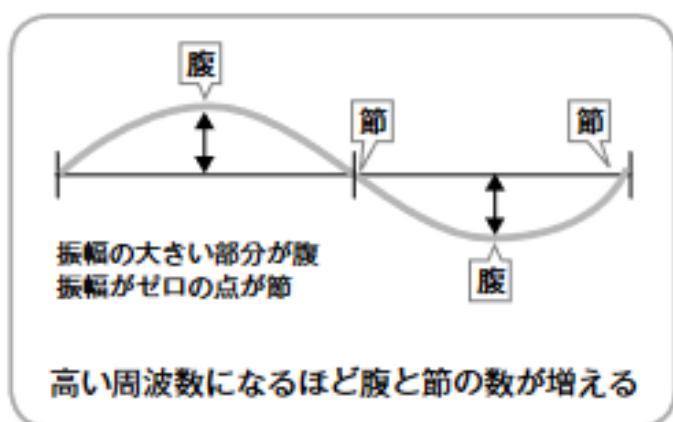
止めている駒（ブリッジ）が力を受けます。駒はボディの上側の板である響板に接着されていて、広い面積をもつた響板が振動するので、大きな音が出ます。表側の響板が振動すると、側面を通して裏側の響板にも振動が伝わります。裏側の響板が振動することによって振動面積が約2倍に増え、音が大きくなります。

ギターはバスレフスピーカ

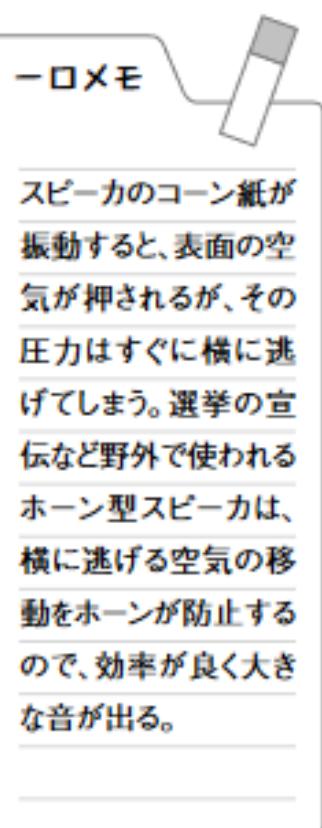
ギターの穴の役目は、バスレフスピーカと同じです。響板が振動すると響板の裏側の空気が振動し、胴の内部にも音が発生します。胴に穴を開けることで内部の音を外に出し、音を大きくしています。

また、響板は、表側の響板には穴があつて裏側には穴がないので、それぞれの板の固有振動数が異なっています。板の固有振動数が弦の振動数に近いほど大き

弦の固有振動モード



(2次の振動モード)



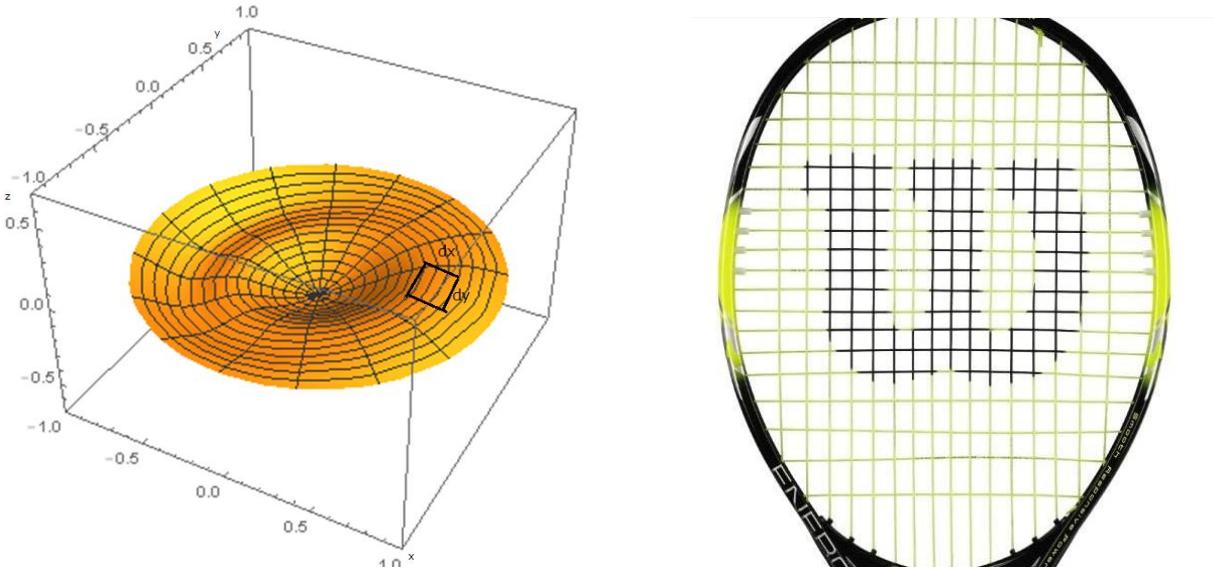
音色は楽器の胴で決まる

NHKの科学番組でギターの胴を三味線の胴に置き換えた実験が行われました。弦はギターのままでですが、出てきた音は三味線の音でした。三味線は、強く張った皮が振動することで音を出しています。皮はギターなどの木に比べて減衰が大きいので、高い音はあまり出ません。また出た音はすぐに小さくなるので、ベンベンという切れた音になります。

な音になるので、響板の固有振動数はなるべくたくさん存在することが音をむらなく出すために必要です。胴の内部は空間になっていて、空間で決まる固有振動数があり、この周波数の音が大きく出ます。

7.3 太鼓の振動

7.3.1 膜の振動



最初、太鼓の膜は平面 $z = 0$ にあったとする。膜は上下に変位すると考える。変位を $u = u(x, y, t)$ とする。膜の単位面積当たりの質量を μ とすれば、微小部分 $dx \cdot dy$ の質量は $\mu \cdot dx \cdot dy$ であり、膜の法線方向の変位を考えます。

この膜を、網目になっているラケットの様に考えることにします。微小部分はガットの交点に微小質量が分布していると考えると、微小部分に働く力は、2本のガットによる力だと言えます。

1本の弦の場合は、

x 軸方向の弦により、上下方向に働く力は

$$-T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x + T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_x dx$$

粒の質量は、線密度を ρ として、 $\rho d x$ 、加速度を

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

とすれば、弦の運動方程式は、

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_x dx$$

すなわち、

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

を得ます。これは、弦の上下運動を規定する方程式です。

弦がもう1本あって、面密度 ρ のときは、微小な質量が、 $\rho dx dy$ であり、 y 軸方向の弦による力を考える。さらに、弦の幅を少し広くして、先に計算した弦による力は、弦の幅が1の時の力だと考えることにすれば、

幅広の弦で、x 軸方向の弦の幅は dy 、y 軸方向の弦の幅は dx とすれば、
弦による力は

$$T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_x dx dy$$

$$T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_y dy dx$$

となり、

$$\rho dx dy \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_x dx dy + T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_y dy dx$$

よって、

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_x + T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_y$$

を得る

7.3.2 矩形の膜

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_x + T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_y$$

を矩形の領域で解いてみる。

解が、

$$u = e^{i(\omega t + kx + ly)} = \exp(i(\omega t + kx + ly))$$

だと仮定して代入してみると、解になる条件として、

$$-\rho \omega^2 = -T(k^2 + l^2)$$

$$\omega = \sqrt{T(k^2 + l^2)/\rho}$$

を得る。

また、次の関数を

$$u = -4e^{i(\omega t)} \sin kx \cdot \sin ly$$

代入してみると、

$$4\rho \omega^2 = 4Tk^2 + 4Tl^2$$

境界条件を、 $x=0$ 、 $y=0$ 、 $x=X$ 、 $y=Y$ では、常に $u=0$ が成立すると仮定する。

$$kX=n\pi, lY=m\pi$$

となるので、

$$\omega = \sqrt{T(k^2 + l^2)/\rho} = \pi \sqrt{T((\frac{n}{X})^2 + (\frac{m}{Y})^2)/\rho}$$

となる。整数 n, m は任意なので、 ω はいろいろな値を取る。

この時解は、

$$u = -4e^{i(\omega t)} \sin \frac{n\pi}{X} x \cdot \sin \frac{m\pi}{Y} y$$

と書けるので、

$$\frac{n}{X}x = 1, 2, \dots n-1$$

の場所で、 u は常に 0 となる。この場所を節線という。 y の場合も同様です。

初期条件

$t = 0$ において、速度は 0 で、変位 u が、

$$u(x, y, 0) = f(x, y)$$

であるとすれば、 u は次の形でなくてはならない。

$$u = \sum_{n,m} A_{nm} \cos \omega_{nm} t \sin \frac{n\pi}{X} x \cdot \sin \frac{m\pi}{Y} y$$

ただし、 $\omega_{nm} = \pi \sqrt{T((\frac{n}{X})^2 + (\frac{m}{Y})^2)/\rho}$ とする。

さらに、 A_{nm} は、

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{n,m} A_{nm} \sin \frac{n\pi}{X} x \cdot \sin \frac{m\pi}{Y} y \quad (4)$$

を満たす必要がある。

$$(4) \text{ 式の両辺に } \sin \frac{n\pi}{X} x \cdot \sin \frac{m\pi}{Y} y$$

を掛けて、 x に関して 0～X まで、 y に関して 0～Y まで積分すれば、

$$\begin{aligned} & \iint_{x=0, y=0}^{x=X, y=T} f(x, y) \sin \frac{n\pi}{X} x \cdot \sin \frac{m\pi}{Y} y \, dx \, dy = \iint_{x=0, y=0}^{x=X, y=T} \sum_{n,m} A_{nm} \sin \frac{n\pi}{X} x \cdot \sin \frac{m\pi}{Y} y \sin \frac{n\pi}{X} x \cdot \sin \frac{m\pi}{Y} y \, dx \, dy \\ &= \frac{XY}{4} A_{nm} \end{aligned}$$

左辺の計算が複雑な場合が多い。

変数分離による方法

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_x + T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_y$$

の解が、

$$u(x, y, t) = P(x)Q(y)R(t)$$

の様になると仮定して、代入してみる。

$$\rho P(x)Q(y)R''(t) = TP''(x)Q(y)R(t) + TP(x)Q''(y)R(t)$$

となり、両辺を、 $P(x)Q(y)R(t)$ で割れば、

$$\frac{R''(t)}{R(t)} = \frac{T}{\rho} \left(\frac{P''(x)}{P(x)} + \frac{Q''(y)}{Q(Y)} \right)$$

となり、左辺は t の関数であり、右辺は x 、 y の関数である。この式が恒等的に成立するには、両辺の値が定

数でなくてはならない。その定数を $-\omega^2$ とすれば、

$$\frac{R''(t)}{R(t)} = -\omega^2$$

$$\frac{T}{\rho} \left(\frac{P''(x)}{P(x)} + \frac{Q''(y)}{Q(Y)} \right) = -\omega^2$$

(7)

となり、(7)式は、

$$\frac{P''(x)}{P(x)} = -\omega^2 \frac{\rho}{T} - \frac{Q''(y)}{Q(Y)}$$

(8)

(8)式の左辺は x の関数、右辺は y の関数だから、恒等式となるには定数 ($-k^2$) に限る。

$$\begin{aligned} R''(t) + \omega^2 R(t) &= 0 \\ P''(x) + k^2 P(x) &= 0 \\ -k^2 &= -\omega^2 \frac{\rho}{T} - \frac{Q''(y)}{Q(Y)} \end{aligned}$$

となる。

$$-l^2 = k^2 - \omega^2 \frac{\rho}{T}$$

とおけば、

$$Q''(y) + l^2 Q(y) = 0$$

となるので、

$$\begin{aligned} P(x) &= e^{ikx} \\ Q(y) &= e^{ily} \\ R(t) &= e^{i\omega t} \end{aligned}$$

を得る。

7.3.3 円形の膜

弦の交点を考えて作った式

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_x + T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_y$$

は同じだが、境界条件が円周上で与えられる場合を考える。

極座標でのラプラスアン

x y 平面に極座標を導入すると、

円形の太鼓の振動は次の様になっている。 $x = r \cos \theta$ 、 $y = r \sin \theta$ 逆に解けば、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 、 $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ となる。 $(\tan^{-1} x)' = 1/(1+x^2)$ に注意して計算すれば、

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x} \right) = \frac{x}{r}$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial y} \right) = \frac{y}{r}$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{-y}{r^2}$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{x}{r^2}$$

を得る。さらに、

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{r} + x(-r^{-2}) \frac{x}{r} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}$$

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{r} + y(-r^{-2}) \frac{y}{r} = \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) = \frac{-1}{r} \cos \theta \frac{-y}{r^2} - \sin \theta (-r^{-2}) \frac{x}{r} = \frac{xy}{r^4} + \frac{y}{r} \frac{x}{r^3} = \frac{2xy}{r^4}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{r} (-\sin \theta) \frac{x}{r^2} + \cos \theta (-r^{-2}) \frac{y}{r} = \frac{-xy}{r^4} - \frac{x}{r} \frac{y}{r^3} = \frac{-2xy}{r^4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial r \partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial \theta \partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \theta \partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 r}{\partial r \partial x} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 r}{\partial \theta \partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r \partial x} \frac{\partial r}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \theta \partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)
\end{aligned}$$

y についても同様なので、

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) \left(\left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \left(\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \left(\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} \right) \right) \\
&+ \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \left(\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) \left(\left(\frac{x}{r} \right)^2 + \left(\frac{y}{r} \right)^2 \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} \right) \left(\frac{x}{r} \cdot \frac{-y}{r^2} + \frac{y}{r} \frac{x}{r^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \left(\left(\frac{-y}{r^2} \right)^2 + \left(\frac{x}{r^2} \right)^2 \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \left(\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right) \right) \\
&+ \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \left(\left(\frac{2xy}{r^4} \right) + \left(\frac{-2xy}{r^4} \right) \right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \frac{1}{r^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \frac{1}{r^2}
\end{aligned}$$

と書ける。

変数分離による方法

方程式は、 $v^2 = T/\rho$ とおけば、方程式

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_x + T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_y$$

は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \frac{1}{r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

となる。

$u = R(r)\Theta(\theta)T(t)$ と仮定して代入した後に、両辺を $R(r)\Theta(\theta)T(t)$ で割れば、

$$\frac{1}{R(r)} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(\frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} \right) \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Theta(\theta)} = \frac{1}{v^2} \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2}$$

左辺と右辺の変数を見れば、これが定数であることが分かる。この定数を $-\omega^2/v^2$ とすれば、右辺から

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0$$

となり、

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

を得る。

左辺からは、

$$\frac{1}{R(r)} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR(r)}{dr} \right) + \left(\frac{d^2\theta(\theta)}{d\theta^2} \right) \frac{1}{r^2} \frac{1}{\theta(\theta)} = -\omega^2/v^2$$

両辺に、 r^2 を掛けてから移項すれば、

$$\left(\frac{d^2\theta(\theta)}{d\theta^2} \right) \frac{1}{\theta(\theta)} = -r^2 \left(\frac{\omega^2}{v^2} + \frac{1}{R(r)} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR(r)}{dr} \right) \right)$$

を得る。ここでも変数は分離されているので、共通の値は定数である。それを、 $-m^2$ と置けば、

左辺から

$$\left(\frac{d^2\theta(\theta)}{d\theta^2} \right) + m^2 \theta(\theta) = 0$$

$$\theta(\theta) = C \cos m\theta + D \sin m\theta$$

右辺から

$$r^2 \left(\frac{\omega^2}{v^2} + \frac{1}{R(r)} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR(r)}{dr} \right) \right) - m^2 = 0$$

となり、

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR(r)}{dr} \right) + \left(\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{m^2}{r^2} \right) R(r) = 0$$

変数を r から $x = \omega r / v$ に変えれば、

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dR}{dx} \right) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) R = 0$$

となる。

これはベッセル方程式であり、この解は m 次のベッセル関数 $R = \text{const} * J_m$ になる。

m が整数の場合は、

J_m の近似式は

$$J_m = \frac{\text{const}}{\sqrt[4]{x^2 - m^2}} \cos \left(\int \sqrt{1 - m^2/x^2} dx - \alpha \right)$$

境界条件

$$u(r, \theta, t) = R(r)\theta(\theta)T(t)$$

が運動方程式の解であり、運動の様子を表すためには、物理的に同一の場所での値が確定しなくてはならない、

$$u(r, \theta, t) = u(r, \theta + 2k\pi, t)$$

より、

$$\theta(\theta) = C \cos m\theta + D \sin m\theta = \theta(\theta + 2k\pi) = C \cos(m\theta + 2k\pi) + D \sin(m\theta + 2k\pi)$$

$\cos(m2k\pi) = 1, \sin(m2k\pi) = 0$ が任意の整数 k に関して成立することになる。よって m は整数でなくてはならない。また、 $\theta(\theta) = C \cos m\theta + D \sin m\theta = E \cos(m\theta - \alpha_{mk})$ とも書ける。

m をある整数として、 R について考える

$$R = J_m(\omega r/v)$$

で

あ

り

$$R(\rho) = J_m(\omega\rho/v) = 0$$

$J_m(x) = 0$ が成立するのは、 x のある確定値 $x = x_1, x_2, \dots$ に対してだけである。よって、 $\omega\rho/v = x_1, x_2, \dots$ とおけば、

$$\omega = x_1 \frac{V}{\rho}, x_2 \frac{V}{\rho}, \dots$$

となる。 ω が、 x_k によって決まっている場合には、 ω が m と k によって決まるので、その値を ω_{mk} と書けば、定数項を省略すれば、解は

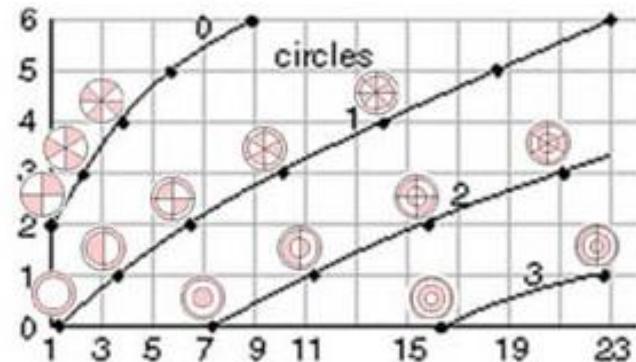
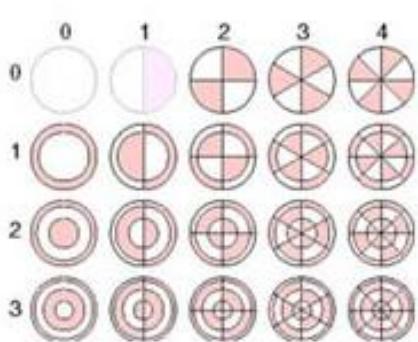
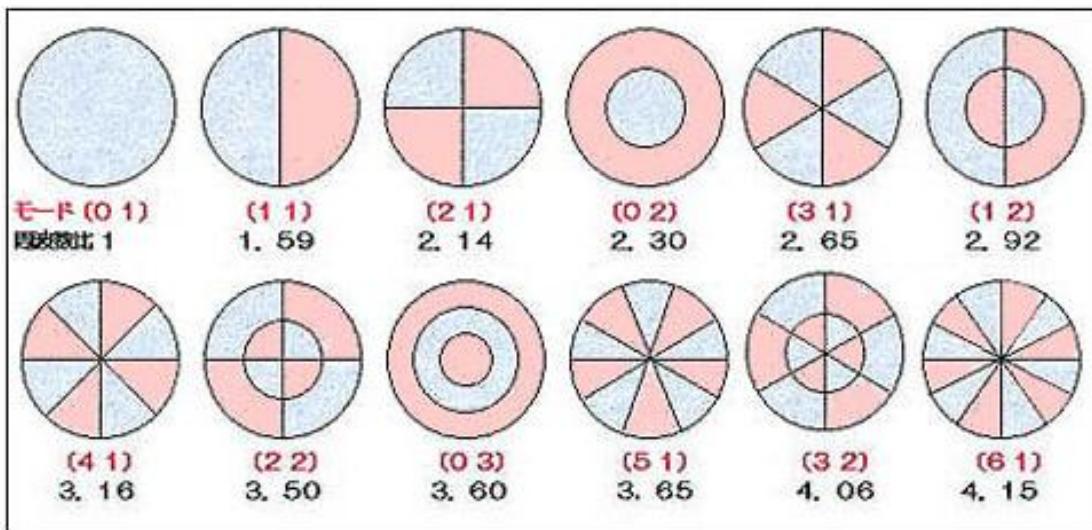
$$u(r, \theta, t) = R(r)\theta(\theta)T(t) = J_m(\omega_{mk}r/v)\cos(m\theta - \alpha_{mk})(A\cos\omega_{mk}t + B\sin\omega_{mk}t)$$

となる。一般解は、これらの線形結合となる。

節線は次のような図になる。

クラドニパターンと周波数比

| 2013.04.29 Monday | ■音の世界 | 17:53 | comments(0) | - | by 小野満磨



$t = 0$ における初期条件

$t = 0$ での各点の変位は $F(r, \theta)$ 、各点の速度は $G(r, \theta)$ であるとします。一般解を

$$u(r, \theta, t) = \sum_{m,k} ((A_{mk} \cos \omega_{mk} t + B_{mk} \sin \omega_{mk} t) \cos m\theta + (C_{mk} \cos \omega_{mk} t + D_{mk} \sin \omega_{mk} t) \sin m\theta) J_m(\omega_{mk} r / v)$$

とすれば、

初期条件より、

$$F(r, \theta) = \sum_{m,k} ((A_{mk}) \cos m\theta + (C_{mk}) \sin m\theta) J_m(\omega_{mk} r / v) \quad (1)$$

t で微分して速度を考えれば、

$$G(r, \theta) = \sum_{m,k} ((\omega_{mk} B_{mk}) \cos m\theta + (\omega_{mk} D_{mk}) \sin m\theta) J_m(\omega_{mk} r / v) \quad (2)$$

係数を決めるには、三角関数の直交性や、ベッセル関数の直交性を使えばよい。

(1) 式の両辺に

$$\cos n\theta J_n(\omega_{nl} r / v)$$

を掛けて、円内で積分する。面積要素が $r dr d\theta$ となることに注意すれば、

$$\int_0^\rho \int_0^{2\pi} F(r, \theta) r dr d\theta = \pi A_{nl} \int_0^\rho r J_n^2(\omega_{nl} r / v) dr$$

となる。

$$c_{nl} = \int_0^\rho r J_n^2(\omega_{nl} r / v) dr$$

と置けば、

$$A_{nl} = \frac{1}{\pi c_{nl}} \int_0^\rho \int_0^{2\pi} F(r, \theta) r dr d\theta = \pi A_{nl} \int_0^\rho r J_n^2(\omega_{nl} r / v) dr$$

を得る。他も同様。

ベッセル関数の性質

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dJ_n(\omega_{nl} r / v)}{dr} \right) + \left(\frac{\omega_{nl}^2}{v^2} - \frac{m^2}{r^2} \right) J_n(\omega_{nl} r / v) = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dJ_n(\omega_{nk} r / v)}{dr} \right) + \left(\frac{\omega_{nk}^2}{v^2} - \frac{m^2}{r^2} \right) J_n(\omega_{nk} r / v) = 0$$

この第1式に $r J_n(\omega_{nk} r / v)$ 、第2式に $r J_n(\omega_{nl} r / v)$ を掛けて、その差を取って積分すれば、

$$\begin{aligned} & \int_0^\rho J_n(\omega_{nk} r / v) \frac{d}{dr} \left(r \frac{dJ_n(\omega_{nl} r / v)}{dr} \right) - J_n(\omega_{nl} r / v) \frac{d}{dr} \left(r \frac{dJ_n(\omega_{nk} r / v)}{dr} \right) dr \\ &= \left(\frac{\omega_{nk}^2}{v^2} - \frac{\omega_{nl}^2}{v^2} \right) \int_0^\rho r J_n(\omega_{nk} r / v) r J_n(\omega_{nl} r / v) dr \end{aligned}$$

となり、左辺を部分積分で計算すれば、0 となるので、直交性が分かる。

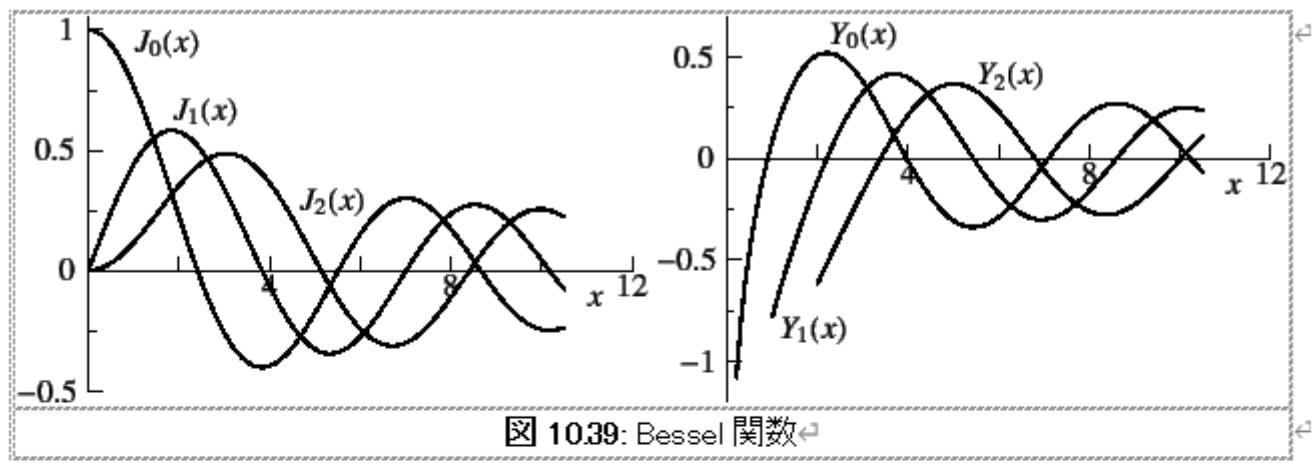


図 10.39: Bessel 関数



表 10.1: 第 1 種 Bessel 関数の零点

m	1	2	3	...
$n = 0 \quad (J_0)$	2.40	5.52	8.65	...
$n = 1 \quad (J_1)$	3.83	7.02	10.2	...
$n = 2 \quad (J_2)$	5.14	8.42	11.6	...
:	:	:	:	..

7.3.4 波動方程式（コーシーの解法）

[1] 1次元の場合

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

初期条件を、 $t = 0$ の時に $u = f(x)$ 、 $\partial u / \partial t = F(x)$ とする。

λ が定数であれば、 $u = e^{i\lambda(x \pm t)}$ は上の微分方程式の解となる。

よって、

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{i\lambda(x-t)} d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} B(\lambda) e^{i\lambda(x+t)} d\lambda$$

も解である。

初期条件を入れると

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (A(\lambda) + B(\lambda)) e^{i\lambda x} d\lambda$$

$$F(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda (-A(\lambda) + B(\lambda)) e^{i\lambda x} d\lambda$$

フーリエ積分の定理

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) e^{i\lambda(x-\alpha)} d\alpha$$

より、

$$A(x) + B(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (A(\alpha) + B(\alpha)) e^{i\lambda(x-\alpha)} d\alpha \right) d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (A(\alpha) + B(\alpha)) e^{i\alpha(-\lambda)} d\alpha \right) e^{i\lambda x} d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(-\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda$$

よって

$$A(\lambda) + B(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) e^{-i\alpha\lambda} d\alpha$$

同様にして、

$$-i\lambda(A(\lambda) - B(\lambda)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha\lambda} d\alpha$$

ゆえに、

$$A(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(\alpha) + \frac{i}{\lambda} F(\alpha)) e^{-i\alpha\lambda} d\alpha$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(\alpha) - \frac{i}{\lambda} F(\alpha)) e^{-i\alpha\lambda} d\alpha$$

を得る。これを代入して、

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(\alpha) + \frac{i}{\lambda} F(\alpha)) e^{-i\alpha\lambda} d\alpha e^{i\lambda(x-t)} d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(\alpha) - \frac{i}{\lambda} F(\alpha)) e^{-i\alpha\lambda} d\alpha e^{i\lambda(x+t)} d\lambda \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) (e^{-i\lambda(\alpha-x+t)} + e^{-i\lambda(\alpha-x-t)}) d\lambda d\alpha \\
&\quad + \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{F(\alpha)}{\lambda}) (e^{-i\lambda(\alpha-x+t)} - e^{-i\lambda(\alpha-x-t)}) d\lambda d\alpha
\end{aligned}$$

ここで、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) e^{i\lambda(x-\alpha)} d\alpha$$

に注意すれば、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) (e^{-i\lambda(\alpha-x+t)} + e^{-i\lambda(\alpha-x-t)}) d\lambda d\alpha \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) (e^{i\lambda((x-t)-\alpha)}) d\alpha d\lambda + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) (e^{i\lambda((x+t)-\alpha)}) d\alpha d\lambda \\
&= \frac{1}{2} f(x-t) + \frac{1}{2} f(x+t)
\end{aligned}$$

また、

$$\frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{F(\alpha)}{\lambda}) (e^{-i\lambda(\alpha-x+t)} - e^{-i\lambda(\alpha-x-t)}) d\alpha d\lambda$$

は、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{\lambda} (e^{-i\lambda(\alpha-x+t)} - e^{-i\lambda(\alpha-x-t)}) d\lambda &= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{\lambda} e^{i\lambda(x-\alpha)} (e^{-i\lambda(t)} - e^{i\lambda(t)}) d\lambda \right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(x-\alpha)} \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} d\lambda \\
&= \int_{-\infty}^0 e^{i\lambda(x-\alpha)} \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} d\lambda + \int_0^{+\infty} e^{i\lambda(x-\alpha)} \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} d\lambda \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda(x-\alpha)} \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} d\lambda + \int_0^{+\infty} e^{i\lambda(x-\alpha)} \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} d\lambda \\
&= 2 \int_0^{+\infty} \cos(\lambda(x-\alpha)) \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} d\lambda \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda(x-\alpha+t) - \sin \lambda(x-\alpha-t)}{\lambda} d\lambda
\end{aligned}$$

寺沢寛一の数学概論 p 85～p 86 によって、

この積分の値は $t >= 0$ として、 $(x - \alpha + t)$ と $(x - \alpha - t)$ が同符号ならば 0, 異符号ならば π となる。

$x - t < \alpha < x + t$ 以外では 0 となるので、2 番目の積分は

$$\frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} F(\alpha) d\alpha$$

となり、

$$u(x, t) = \frac{1}{2} f(x-t) + \frac{1}{2} f(x+t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} F(\alpha) d\alpha$$

を得る。

[2] 2次元の場合

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

(14.70)

初期条件を、 $t = 0$ の時に $u = f(x, y)$ 、 $\partial u / \partial t = F(x, y)$ とする。

$e^{i\lambda x + i\mu y} \cos \rho t$ 、 $e^{i\lambda x + i\mu y} \sin \rho t$ 、ただし、 $\rho = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$

は、解であり、これらを重ね合わせて、

$$u = \iint_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda, \mu) e^{i\lambda x + i\mu y} \cos \rho t d\lambda d\mu + \iint_{-\infty}^{+\infty} B(\lambda, \mu) e^{i\lambda x + i\mu y} \sin \rho t d\lambda d\mu$$

$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda, \mu) e^{i\lambda x + i\mu y} d\lambda d\mu$$

$$F(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \rho B(\lambda, \mu) e^{i\lambda x + i\mu y} d\lambda d\mu$$

フーリエの積分定理より

$$A(\lambda, \mu) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) e^{-i\lambda\alpha - i\mu\beta} d\alpha d\beta$$

$$B(\lambda, \mu) = \frac{1}{4\pi^2 \rho} \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha, \beta) e^{-i\lambda\alpha - i\mu\beta} d\alpha d\beta$$

となるので、

$$u = \iint_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) e^{-i\lambda\alpha - i\mu\beta} d\alpha d\beta \right) e^{i\lambda x + i\mu y} \cos \rho t d\lambda d\mu$$

$$+ \iint_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4\pi^2 \rho} \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha, \beta) e^{-i\lambda\alpha - i\mu\beta} d\alpha d\beta \right) e^{i\lambda x + i\mu y} \sin \rho t d\lambda d\mu$$

を得る。

[3] 3次元の場合

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla^2 u$$

(14.70)

初期条件を、 $t = 0$ の時に $u = f(x, y, z)$ 、 $\partial u / \partial t = F(x, y, z)$ とする。

この式も同様の方法で解ける。

$$u = u_1 + u_2$$

と置いて、

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta, \gamma) e^{i(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)} \cos \rho t d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu \\ &= \frac{1}{8\pi^3} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta, \gamma) e^{i(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)} \frac{\sin \rho t}{\rho} d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu \\ u_2 &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha, \beta, \gamma) e^{i(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)} \frac{\sin \rho t}{\rho} d\alpha d\beta d\gamma d\lambda d\mu d\nu \end{aligned}$$

を得る。

7.3.5 振動性物体からの低周波音放射

デルタ関数

$$\delta(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}, \quad \varepsilon \rightarrow +0$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & (x \neq 0) \\ \infty, & (x = 0) \end{cases}$$

であり、さらに

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} dx$$

ここで、 $\tau = x/\varepsilon$ と置けば、

$$\frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} dx = \frac{1}{\pi(1 + \tau^2)} d\tau$$

$$(tan^{-1}\tau)' = \frac{1}{(1 + \tau^2)}$$

より、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = \frac{1}{\pi} ((tan^{-1}\infty) - (tan^{-1}(-\infty))) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

となる。

また、

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|}$$

については、 $f(x) = 0$ の解を $\{x_n\}$ とする。解は重複していないとする。

右辺の積分については、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|} dx = \sum_n \int \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|} dx = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|}$$

左辺の積分は、 x_n の近傍での積分に近傍の外側でのゼロの値の積分を付け足して考えると、

$$\begin{aligned} \int_{x_n} \delta(f(x)) dx &= \int_{x_n; -\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{\pi((f(x))^2 + \varepsilon^2)} dx \\ &= \int_{x_n; -\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{\pi((f(x) - f(x_n))^2 + \varepsilon^2)} dx \\ &= \int_{x_n; -\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{\pi((f'(x_n)(x - x_n))^2 + \varepsilon^2)} dx \\ &= \frac{1}{|f'(x_n)|} \int_{x_n; -\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon / |f'(x_n)|}{\pi((x - x_n)^2 + (\frac{\varepsilon}{|f'(x_n)|})^2)} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|}$$

となり、解全体では、

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|}$$

となる。

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0$$

は、次のようにも書ける。

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \operatorname{div}(v) = 0$$

$$\operatorname{div}(v) = \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

ただし、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

とする。

運動方程式

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\nabla p + \eta (\nabla^2 v + \frac{1}{3} \nabla (\operatorname{div} v)) + F, \quad (1.2.3)$$

ここで、圧力 p 、単位体積当たりの体積力 F 、粘性 η 、密度 ρ 、動粘性係数 $\nu = \eta / \rho$ 、この式は、粘性がない場合の式

$$\frac{D}{Dt} V = K - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p$$

で K を F に変えて、さらに、粘性による影響

$$\eta (\nabla^2 v + \frac{1}{3} \nabla (\operatorname{div} v))$$

を考慮した式です。

3.5 エントロピー

下図のような $p-V$ グラフにおける状態変化を考えます。ただし、全て可逆的準静変化であるとします。

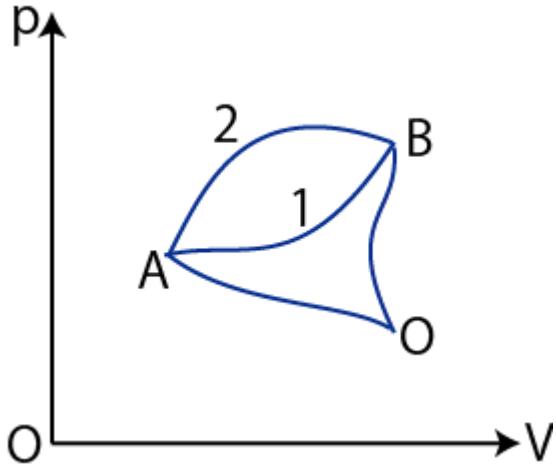


Figure3.5: エントロピー

このとき、

$$\oint \frac{d'Q}{T} = \int_{A \rightarrow 1 \rightarrow B} \frac{d'Q}{T} + \int_{B \rightarrow 2 \rightarrow A} \frac{d'Q}{T} = 0$$

ここで、変化を逆にすると、熱の吸収と放出が逆になるので、

$$\int_{B \rightarrow 2 \rightarrow A} \frac{d'Q}{T} = - \int_{A \rightarrow 2 \rightarrow B} \frac{d'Q}{T}$$

となります。したがって、

$$\int_{A \rightarrow 1 \rightarrow B} \frac{d'Q}{T} = \int_{A \rightarrow 2 \rightarrow B} \frac{d'Q}{T}$$

が成立します。つまり、この積分の量は途中の経路によらず、状態 A と状態 B だけで決まります。そこで、ある基準 O をとり、次の積分で表される量を定義します。

$S(A)$	$\equiv \int_O^A \frac{d'Q}{T}$
$S(B)$	$\equiv \int_O^B \frac{d'Q}{T}$
$S [J/K]$	

は状態だけで決定されるので状態量です。また、基準 O の取り方による不定性があります。このとき、

$$\int_A^B \frac{d'Q}{T} = \int_A^O \frac{d'Q}{T} + \int_O^B \frac{d'Q}{T}$$

$$\Leftrightarrow \int_A^B \frac{d'Q}{T} = \int_O^B \frac{d'Q}{T} - \int_O^A \frac{d'Q}{T}$$

となり、

$$\int_A^B \frac{d'Q}{T} = S(B) - S(A)$$

が成立します。ここで、状態量 $S[J/K]$ をエントロピーといいます。エントロピーの微分は、

$$dS = \frac{d'Q}{T}$$

で与えられます。 $S[J/K]$ が状態量なので、 $dS[J/K]$ は完全微分です。この式を書き直すと、

$$d'Q = TdS$$

なので、熱力学第1法則、

$$dU = d'Q - pdV$$

に代入すると、

$$dU = TdS - pdV$$

(3.6)

が成立します。ここで、n[mol] の理想気体のエントロピーを求めてみましょう。定積モル比熱を

$C_V[J/mol \cdot K]$ として、

$$\Leftrightarrow dU = nC_VdT$$

$$\Leftrightarrow pV = nRT$$

が成り立つので、(3.6)式に代入すると、

$$nC_VdT = TdS - \frac{nRT}{V}dV$$

$$\therefore TdS = nC_VdT + nRT\frac{dV}{V}$$

$$\therefore dS = nC_V\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V}$$

$$\therefore S = nC_V \log T + nR \log V + const$$

となります。最後の式が理想気体のエントロピーを表す式になります。

エネルギー方程式

流体の比エントロピー s が流体全体で一様かつ一定

$s = \text{一定}$

とする。

この時、圧力と密度は

$$p = p(\rho, s), \quad s = \text{一定}$$

と考えたとき、理想気体については

$$p = \text{定数} * \rho^\gamma$$

となる。 γ は比熱比とする。

線形音響方程式

音響圧力 p の強さは音圧レベルすなわち

$$20 * \log_{10} \frac{p}{p_{ref}}$$

によるデシベル表示で測定される。ただし、基準音圧 $p_{ref} = 2 * 10^{-5} N/m^2$

平均音圧は、 $p_0 = 1 \text{ atm} = 10^5 N/m^2$ は、194 dB であり、これに対して 120 dB の音の音圧は、

$$\frac{p}{p_0} = \frac{2 * 10^{-5}}{10^5} * 10^{(120/20)} = 2 * 10^{-4} \ll 1$$

となる。

圧力変動の形での音波の通過は、音響粒子速度 v での流体の振動運動を伴う。この時

$$\text{音響粒子速度} = \text{音響圧力} / (\text{平均密度} * \text{音速})$$

となる。(120 dB では、 $v = 5 \text{ cm/s}$ 、160 dB では、 $v = 5 \text{ m/s}$ である。)

普通に経験する音波の音圧は、平均音圧（1気圧の時の圧力）と比べればはるかに小さい。これを利用して、方程式を線形化して考えることができる。

平均圧力 p_0 、平均密度 ρ_0 の静止非粘性流体中を伝播する音を考える。平均値からの摂動を p' 、 ρ' とする。ただし、 $p'/p_0 \ll 1$ 、 $\rho'/\rho_0 \ll 1$ とする。

線形化された運動方程式 (1.2.3) は

$$\rho \frac{Dv}{Dt} + \nabla p' = F \tag{1.3.1}$$

となる。

連続の式 (1.2.1) の右辺に体積湧きだし分布 $q(x, t)$ を加えて

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \operatorname{div}(v) = q(x, t)$$

一般化した式を考えることにする。

$q(x, t)$ は流体の単位体積当たりの流体の体積増加率である。これを使って、流体の中の小さな物体の体積振動の効果を表すことが出来る。

線形方程式は、

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{D\rho'}{Dt} + \operatorname{div}(v) = q(x, t)$$

(1.3.3)

となる。

(1.3.1)、(1.3.3) から v 消去すれば、

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \nabla^2 p' = \rho_0 \frac{\partial q}{\partial t} - \operatorname{div} F$$

q と F を用いて、 p' を決定する方程式は、等エントロピー方程式 (1.2.5) から得られる。

変動の無い状態および、変動がある状態の圧力はそれぞれ

$$\begin{aligned} p_0 &= p(\rho_0, s) \\ p_0 + p' &= p(\rho_0 + p', s) \approx p(\rho_0, s) + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, s)\right)_0 \rho' \\ s &= \text{一定} \end{aligned}$$

(1.3.5)

である。導関数は圧力と密度の変動のないときの値(p_0, ρ_0)で計算される。それは速度の2乗の次元を持ちその平方根は音速

$$c_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$$

を定義する。ただし、微分はエントロピーが一定との条件で行われる。

これは、音波が通過する間、粘性及び熱拡散により周囲の気体粒子の間での熱伝達による損失が無視される。

式 (1.3.5) より、 $\rho' = p'/c_0^2$ であるから、これを (1.3.4) の ρ' に代入して、

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) p' = \rho_0 \frac{\partial q}{\partial t} - \operatorname{div}$$

を得る。

この式は、体積湧きだしや力 F による音波の発生を支配する。これらの項が無いとき、方程式は流体の境界上にある音源、例えばスピーカーの振動部からの波動伝播を記述する。

$F=0$ のとき、式 (1.3.1) は $v = \nabla \varphi$ と表される速度ポテンシャル φ の存在を意味する。これを使えば

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

で与えられる。

この式と、 $F = 0$ と置いた時の式 (1.3.7) から速度ポテンシャルは

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \varphi = -q(x, t)$$

の解となる。

非圧縮性流体での特別な場合

小さな断熱の圧縮変動 δp と密度変動 $\delta\rho$ は、

$$\frac{\delta p}{\delta\rho} \approx c_0^2$$

の関係を満たす。

非圧縮性流体においては、圧力は外力の作用で変化するが、密度は一定のままである。したがって、 $c_0 = \infty$ であり、式 (1.3.9) は

$$\nabla^2\varphi = q(x, t)$$

となる。

拍動する球 p 7

平均半径 a の球が半径方向に小さな振幅で拍動することによって生じる流体運動を考える。

球面の法線速度を $v_n(t)$ とする。流体内には湧き出しあり得ないので、 $q = 0$ である。それゆえ、

$$\nabla^2\varphi = 0, \quad r > a$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = v_n(t), \quad r = a$$

ただし、 $r = |x|$ とする。

運動は明らかに球対象であるので、その結果

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) = 0, \quad r > a$$

である。よって、

$$\varphi = \frac{A(t)}{r} + B(t)$$

となる。

$B(t)$ は圧力変動 ($\sim \rho_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t}$) が無限遠方でゼロにならねばならないことから除かれる。

$r = a$ での境界条件

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = v_n(t)$$

を適用すれば、

$$\varphi = -\frac{a^2 v_n(t)}{r}, \quad r > a$$

となり、圧力は、

$$p = -\rho_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \rho_0 \frac{a^2}{r} \frac{dv_n(t)}{dt}$$

は、球からの距離と共に $1/r$ で減衰し、 $dv_n(t)/dt$ が変化するとき至る所で瞬間的に変化すると言う非物理的な特性を示すことになる。

$v_n(t)$ については、塔に

$F=221956+139\sin(\omega t)-5\cos(2\omega t)+308\sin(3\omega t)$ のような、周期的に変化する力が加われば、

円筒の弾塑性純曲げ崩壊に関する研究（陳 珮□ 増田健一 尾崎伸吾）によれば、

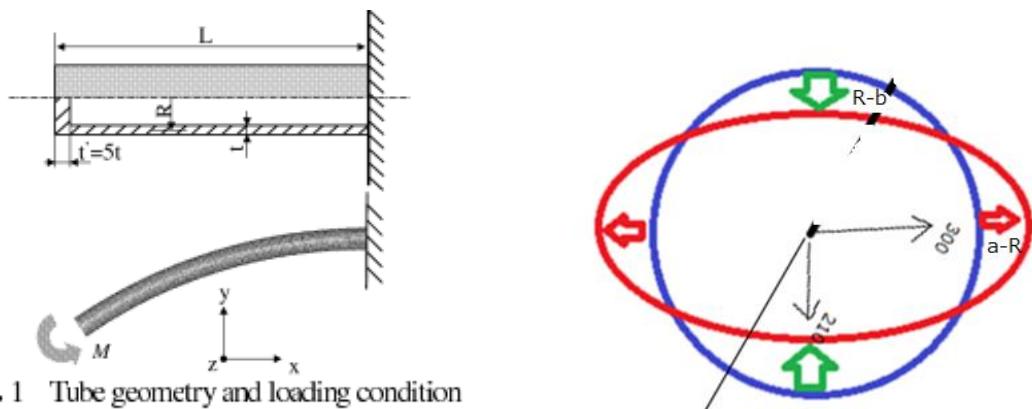


Fig. 1 Tube geometry and loading condition

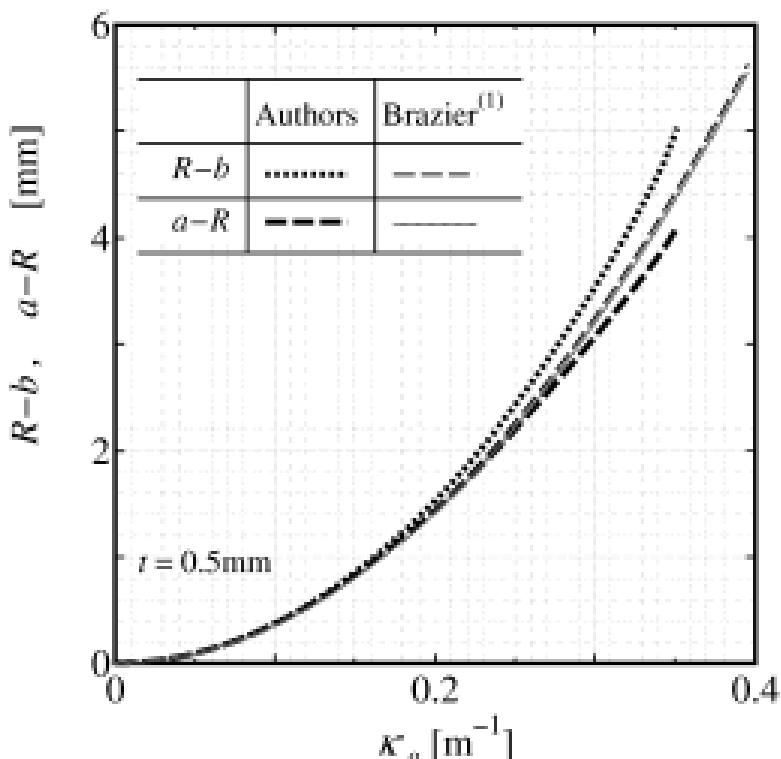
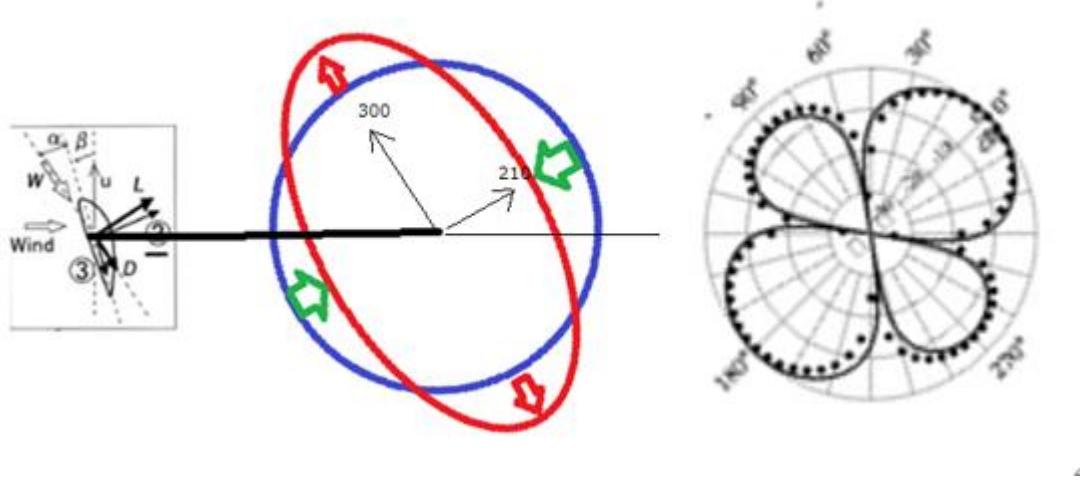


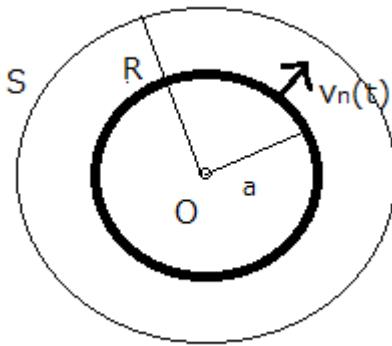
Fig. 2 Comparison between present FE analysis and Brazier's theory⁽¹⁾ for elastic material

上のグラフから、塔にかかる力が変動すれば、それと同じ周期的な変動が、R-b にも、a-R にも起きることが分かります。



塔の側面の速度も同様に周期的に変動する。定数項は微分で消えてしまうので、
 p は三角関数の和となって、超低周波音による音圧の変動が、拡散されることになる。

点湧き出し p 8



原点にある強さ $q(t)$ の点湧き出しにより生み出される非圧縮性運動は、

$$\nabla^2 \varphi = q(t) \delta(x), \quad \delta(x) = \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3)$$

の解であり、解は球対称であり、

$$\varphi = \frac{A}{r}, \quad r > 0$$

で与えられる。

A は、次のようにして決まる。半径 R の球の内部について、式 (1.4.4) を積分して、発散定理

$$\int_{r < R} \nabla^2 \varphi d^3x = \oint_S \nabla \varphi \cdot dS$$

を使えば、

$$\oint_S \nabla \varphi \cdot dS = \frac{-A}{R^2} 4\pi R^2 = q(t)$$

となる。

ゆえに。

$$A = -q(t)/4\pi$$

$$\varphi = \frac{-q(t)}{4\pi r}$$

となる。

これは、同じ湧き出し流量の球に対する、 $r > a$ の領域での解 (1.4.3) と一致する。

これから、遠方場での拍動球の効果をモデル化したとき、球の体積変化率と等価な湧き出しの強さ $q(t)$ を持つ点湧き出し (単極子) で球を置き換えても良いことを意味している。

ここで、

$$\varphi = \frac{-q(t)}{4\pi r}$$

の式は、 $r = 0$ の場合は定義されていないので、 $\nabla^2 \varphi$ が成立するのは、 $r > 0$ の場合だけです。

$r = 0$ でも成立するように拡張します。

$$\varphi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-q(t)}{4\pi(r^2 + \epsilon^2)^{1/2}}$$

$dx^a dy^a dz$ での積分については、極座標 (r, θ, φ) で考えると

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

であり、ヤコビ行列式 J は

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta$$

で積分は

$$\iiint dx dy dz = \iiint r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

となる。

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_V \frac{3\epsilon^2 f(x) d^3 x}{4\pi(r^2 + \epsilon^2)^{5/2}} \\ &= f(0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_V \frac{3\epsilon^2 d^3 x}{4\pi(r^2 + \epsilon^2)^{5/2}} \\ &= f(0) \int_0^\infty \frac{3\epsilon^2 r^2 dr}{(r^2 + \epsilon^2)^{5/2}} = f(0) \end{aligned}$$

となる。

このように、単位強さの湧き出し $q = 1$ に対する

$$\nabla^2 \varphi = \delta(x), \text{ の解 } \varphi = \frac{-1}{4\pi r}$$

のより正しい解釈は

$$\varphi = \frac{-1}{4\pi r} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{4\pi(r^2 + \epsilon^2)^{1/2}}, \quad (r \geq 0)$$

である。ただし、

$$\nabla^2 \varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nabla^2 \frac{-1}{4\pi(r^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3\varepsilon^2}{4\pi(r^2 + \varepsilon^2)^{5/2}} = \delta(x)$$

瞬間点音源により生成される音 p 10

単位強さの瞬間に与えられた点音源 $\delta(x)\delta(t)$ により生み出される音は

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \varphi = \delta(x)\delta(t)$$

の解である。

音源は、 $t = 0$ での無限小時間にのみ存在する。それゆえ、それ以前の時刻では、至る所で $\varphi(x, t) = 0$ であり、明らかに、解は球対称であり、 $r = |x| > 0$ に対して

直交座標(x, y, z)と極座標(r, θ, ϕ)では、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

は、

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

と書けて、対称性から φ は r と t の関数であり、 θ, ϕ は含まれない。この時は

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

となるので、

$r > 0$ に於いて、

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) \varphi = 0$$

となる。

恒等式

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi)$$

を使えば、

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\varphi) - \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) = 0, \quad (r > 0)$$

となる。この解は、

$$(r\varphi) = \Phi(t - r/c_0) + \Psi(t + r/c_0)$$

であるから、

$$\varphi = \frac{1}{r} (\Phi(t - r/c_0) + \Psi(t + r/c_0)), \quad (r > 0)$$

となる。

この第1項は、時刻 t と共に音速 c_0 で r の増加方向に伝搬する球面対称擾乱を表し、第2項は無限遠方から、球の中心に向かって集まつくる擾乱を表す。

実際には、無限遠方から音が集まつくることはないので、第2項は捨てるにすることにする。

$r = 0$ をも含めて Φ を決定するために、

$$\varphi = \frac{1}{r} (\Phi(t - r/c_0) = \lim_{(r^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \frac{\Phi(t - r/c_0)}{(r^2 + \varepsilon^2)^{1/2}}, \quad (r \geq 0)$$

と置く。このとき、

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \varphi) = -\frac{3\varepsilon^2 \Phi(t - r/c_0)}{(r^2 + \varepsilon^2)^{5/2}} - \frac{2\varepsilon^2 \Phi'(t - r/c_0)}{c_0(r^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} + \frac{\Phi''(t - r/c_0)}{c_0^2(r^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \\ \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= \frac{\Phi''(t - r/c_0)}{c_0^2(r^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

を得る。従って、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \varphi &= \frac{3\varepsilon^2 \Phi(t - r/c_0)}{(r^2 + \varepsilon^2)^{5/2}} + \frac{2\varepsilon^2 \Phi'(t - r/c_0)}{c_0(r^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \\ &\rightarrow 4\pi \Phi(t) \delta(x) + 0, \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \end{aligned}$$

となる。

最後の項+0 は滑らかに変化する関数 $f(x)$ に関して、

$$\begin{aligned} \int_V \frac{2\varepsilon^2 f(x) d^3x}{r(r^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} &\approx f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3\varepsilon^2 d^3x}{r(r^2 + \varepsilon^2)^{5/2}} \\ &\approx f(0) \int_0^{\infty} \frac{8\pi \varepsilon^2 r dr}{(r^2 + \varepsilon^2)^{5/2}} = 8\pi \varepsilon f(0) \rightarrow 0, \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \end{aligned}$$

として得られる。

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \varphi \approx 4\pi \Phi(t) \delta(x) = \delta(x) \delta(t)$$

より、

$$\Phi(t) = \frac{1}{4\pi} \delta(t)$$

となるので、解は

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t - r/c_0) = \frac{1}{4\pi |x|} \delta(t - |x|/c_0)$$

となる。

自由空間グリーン関数 p 13

自由空間グリーン関数 $G(x, y, t - \tau)$ は、時刻 $t = \tau$ に点 $x = y$ で瞬間的に与えられた点源 $\delta(x - y)\delta(t - \tau)$ により生成される波動方程式の放射解です。

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) G = \delta(x - y)\delta(t - \tau), \quad (t < \tau \text{ のとき } G = 0)$$

とすれば、解は、(1.5.8) で x を $x - y$ 、 t を $t - \tau$ に置き換えればよいので、

$$G(x, y, t - \tau) = \frac{1}{4\pi|x - y|} \delta(t - \tau - |x - y|/c_0)$$

となる。

これは、yでの点源からパルス的に球対称に広がってゆく波を表す。振幅は、点源yからの距離に反比例して減少する。

グリーン関数は、線形音響理論の非同次波動方程式（1.3.7）の解を構築する為の基本構成要素である。この方程式を、

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) p = \mathcal{F}(x, t)$$

と書けば、

一般化された音源 $\mathcal{F}(x, t)$ は放射条件に従い、音源から離れてゆく方向に伝搬する波動を生成していると仮定する。

この音源の分布は

$$\mathcal{F}(x, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(y, \tau) \delta(x - y) \delta(t - \tau) d^3 y d\tau$$

と書けるので、式（1.6.1）の右辺にあるようなパルス点源の分布を考えることができる。分布を構成するそれぞれの強さ、

$$\mathcal{F}(y, \tau) \delta(x - y) \delta(t - \tau) d^3 y d\tau$$

の点源から放射される波動解は

$$\mathcal{F}(y, \tau) G(x, y, t - \tau) d^3 y d\tau$$

である。

したがって、これら個々の点に対する解を加え合わせると、

波動方程式の解が、

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(y, \tau) G(x, y, t - \tau) d^3 y d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(y, \tau)}{|x - y|} \delta(t - \tau - |x - y|/c_0) d^3 y d\tau \end{aligned}$$

よって、

$$p(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(y, t - |x - y|/c_0)}{|x - y|} d^3 y$$

を得る。この式を、遅延ポテンシャルと呼ぶ。これは、位置x、時刻tでの圧力を、位置yにある音源からより早い時刻 $t - |x - y|/c_0$ に放射された音の寄与を線形的に重ね合わせたものとして表現しているからです。

単極子、双極子、四重極子

单極子

拍動球の時に考えた、体積点源 $q(t)\delta(x)$ は、单極子と呼ばれる。圧縮性媒体に対してはその点源が生み出す音に応答する速度ポテンシャルは方程式

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \varphi = -q(t)\delta(x)$$

の解である。

解は、音響圧力に対する方程式（1.6.3）の解（1.6.5）を真似して求められる。

式 (1.6.5) の p を ϕ で置き換え、 $\mathcal{F}(x, t) = -q(t)\delta(y)$ と置くと、

$$\varphi(x, t) = \frac{-q(t - |x|/c_0)}{4\pi|x|} = \frac{-q(t - r/c_0)}{4\pi r}$$

となる。

双極子点源

$f-f(t)$ を、時間依存のベクトルとする。そのとき、

$$\mathcal{F}(x, t) = \operatorname{div}(f(t)\delta(x)) = \frac{\partial}{\partial x_j}(f_j(t)\delta(x))$$

で表される音圧の方程式 (1.6.3)

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) p = \operatorname{div}(f(t)\delta(x)) = \frac{\partial}{\partial x_j}(f_j(t)\delta(x))$$

の右辺の音源は、原点に位置する双極子点源と呼ばれる。

この方程式は、双極子点源が原点の流体に作用する単位体積当たりの力の分布 $F = -f(t)\delta(x)$ と等価であることを示している。

双極子により生成される音は、(1.6.5、1.6.4) がら計算出来て

$$p(x, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_j}(f_j(\tau)\delta(y)) \frac{\delta(t - \tau - |x - y|/c_0)}{|x - y|} d^3y d\tau$$

各 y_j について部分積分を行って、 $y_j = \pm\infty$ で $\delta(y) = 0$ となることと、

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\delta(t - \tau - |x - y|/c_0)}{|x - y|} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\delta(t - \tau - |x - y|/c_0)}{|x - y|}$$

を考慮すれば、

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} (f_j(\tau)\delta(y)) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\delta(t - \tau - |x - y|/c_0)}{|x - y|} \right) d^3y d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_j} \iint_{-\infty}^{\infty} (f_j(\tau)\delta(y)) \left(\frac{\delta(t - \tau - |x - y|/c_0)}{|x - y|} \right) d^3y d\tau \end{aligned}$$

となり、

$$p(x, t) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f_j(t - |x|/c_0)}{4\pi|x|} \right)$$

を得る。

さらに、

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) p = \operatorname{div}(f(t))$$

の場合には、

$$p(x, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{f_j(y, t - |x - y|/c_0)}{|x - y|} \right) d^3y$$

となる。

四重極子

これは、音源を

$$\mathcal{F}(x, t) = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}(x, t)$$

とした場合である。

方程式は

$$\left(\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) p = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}(x, t)$$

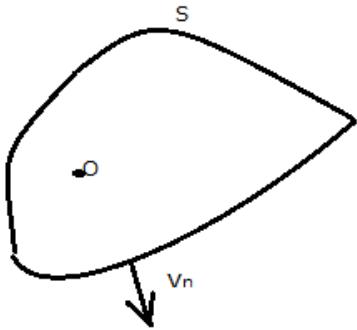
となり、音響圧力は

$$p(x, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{T_{ij}(y, t - |x - y|/c_0)}{|x - y|} \right) d^3 y$$

となる。

振動球による音 p 61

固定された物体の表面 S が法線速度 $v_n(X, \omega)$ で微小振動している場合を考える。



S が静止していると仮定される場合には、流体の運動は、 S の単位面積当たり強さ $v_n(X, \omega)$ を持つ单極子の分布により生成されるものと同一である。非同次ヘルムホルツ方程式 (3.2.1) における対応する音源の強さ $q(X, \omega)$ は、

$$q(X, \omega) = v_n(X, \omega) \delta(s_\perp - \varepsilon), \quad (\varepsilon \rightarrow +0)$$

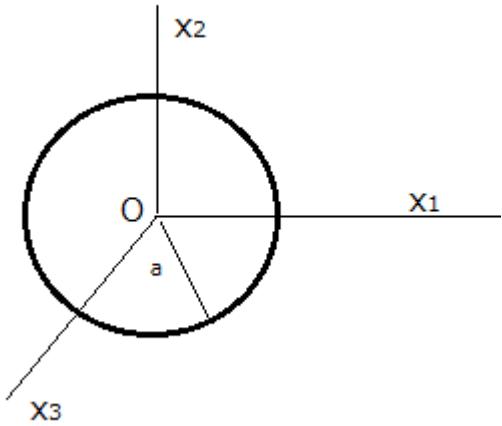
である。ただし、 s_\perp は S から法線方向に向かって測った距離であり、 $\varepsilon > 0$ は、音源が丁度 S の近傍の流体に配置されていることを表す。

速度ポテンシャル $\varphi(X, \omega)$ は、それゆえ

$$\hat{\varphi}(X, \omega) = \int v_n(y, \omega) \delta(s_\perp - \varepsilon) \hat{G}(x, y, \omega) d^3 y, \quad (\varepsilon \rightarrow +0)$$

$$= \oint_S v_n(y, \omega) \hat{G}(x, y, \omega) dS(y), \quad (\text{ただし、} S \text{ 上で } \frac{\partial \hat{G}}{\partial x_n}(x, y, \omega) = 0)$$

となる。



上の図の球が、原点を中心 x_1 軸に沿って、 $\hat{U}(\omega)e^{-i\omega t}$ の速度で微小振幅の振動をしている場合に生成される音を考える。その場合複素形式での実部が物理的な振動に対応するので、

$$v_n(y, \omega) = \hat{U}(\omega) \cos \theta$$

である。もし、振動が十分低い周波数であれば、球はコンパクトであり、観測者が音響遠方場の \mathbf{x} にいる場合、式 (3.5.4) の積分は、 $\hat{G}(x, y, \omega)$ に対するコンパクト近似 (3.5.2) を用いて計算できる。

$$\begin{aligned} & \hat{\phi}(X, \omega) \\ & \approx \frac{-e^{ik_0|x|}}{4\pi|x|} \left[\oint_S v_n(y, \omega) dS(y) - \frac{i\kappa_0 x_j}{|x|} \oint_S y_j \left(1 + \frac{a^3}{2|y|^3}\right) v_n(y, \omega) dS(y) \right] \end{aligned}$$

1つ目の積分は、 S を通しての合計の体積流束を表していて、剛体の併進運動では恒等的にゼロになる。

2つ目の積分は、 S 上で $y_1 = a \cos \theta$ および、 $|y| = a$ とすると、 $j = 1$ に対してのみゼロではなく、 $dS = 2\pi a^2 \sin \theta d\theta$ である。その結果、面積分は、

$$3\pi a^3 \hat{U}(\omega) \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 3\pi a^3 \hat{U}(\omega)$$

となる。したがって、

$$\hat{\phi}(X, \omega) \approx \frac{i\kappa_0 \hat{U}(\omega) a^3 x_1 e^{ik_0|x|}}{2|x|^2} \equiv \frac{i\kappa_0 \hat{U}(\omega) a^3 \cos \theta e^{ik_0|x|}}{2c_0|x|}, \quad |x| \rightarrow \infty$$

となる。

ただし、 θ は x_1 軸と放射方向 X の間の角度である。

球がコンパクトであるならば、任意の時間変動速度 $U(t)$ で振動する球に対する解は、この結果より

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{U}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

と書くと、 $\kappa_0 a \ll 1$ の時だけ $\hat{U}(\omega) \neq 0$ であることを意味する。

この条件が見たされると、公式 (3.2.3) と式 (3.2.3) を用いて、時間に依存する速度ポテンシャルが得られる。

$$\varphi(x, t) \approx \frac{a^3 \cos \theta}{2c_0|x|} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \hat{U}(\omega) e^{-i\omega(t-|x|/c_0)} d\omega$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-a^3 \cos \theta}{2c_0|x|} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{U}(\omega) e^{-i\omega(t-|x|/c_0)} d\omega \\
&= \frac{-a^3 \cos \theta}{2c_0|x|} \frac{\partial U}{\partial t} (t - |x|/c_0), \quad |x| \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

これは、1.7節で求めた遠方場の結果と一致し、その時用いた、振動球をその中心に位置する強さ $2\pi a^3 U(t)$ の双極子点音源で置き換えたモデルの正当性を裏付ける。

コンパクトグリーン関数 p 71

波動方程式に対するコンパクトグリーン関数を

$$G(x, y, t - \tau) = \frac{1}{4\pi|X - Y|} \delta\left(t - \tau - \frac{|X - Y|}{c_0}\right)$$

と定義する。

ここで、 $X = x - \varphi^*(x)$ 、 $Y = y - \varphi^*(y)$ は物体に対するキルヒ霍ップベクトルである。

成分 X_j 、 Y_j は、物体から十分離れた位置で j 方向の単位速度を持つような、物体を過ぎる非圧縮流れの速度ポテンシャルである。

φ_j^* は、 j 方向に単位速度で運動する物体 S により生み出される非圧縮流れの速度ポテンシャルである。

振動性物体からの低周波音放射 : p 72

法線方向速度 $v_n(X, t)$ で振動している閉曲面 S を考える。

流体中の速度ポテンシャル（式 3.1.1 で記述される。）は、静止剛体壁とみなされる S 上に分布する体積振動源

$$q(x, t) = v_0(x, t) \delta(s_\perp - \varepsilon) \quad (\varepsilon \rightarrow +0)$$

により作られるものと同一である。ここで、 s_\perp は S から流体中へ向かっての法線方向距離である。速度ポテンシャル $\varphi(x, t)$ は、厳密に

$$\begin{aligned}
\varphi(x, t) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{fluid} v_n(y, \tau) \delta(s_\perp - \varepsilon) G(x, y, t - \tau) d^3 y d\tau, \quad (\varepsilon \rightarrow +0) \\
&= - \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S v_n(y, \tau) G(x, y, t - \tau) dS(y) dr
\end{aligned}$$

ただし、S 上で

$$\frac{\partial G}{\partial x_n}(x, y, t - \tau) = 0$$

で与えられる。

低周波では、遠方場の音に対する第一近似は、式 (3.8.2) の $G(x, y, t - \tau)$ をコンパクト近似 (3.7.5) で置き換える事で得られる。

詳細は以下の通りである。

それらは、コンパクトグリーン関数を用いるときに採用されるべき一般的な方法である。

$$\begin{aligned}
\varphi(x, t) &\cong - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{fluid} \frac{v_n(y, \tau) \delta(s_\perp - \varepsilon)}{4\pi|X - Y|} \delta(t - \tau - \frac{|X - Y|}{c_0}) d^3y d\tau \\
&= - \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S \frac{v_n(y, \tau) \delta(s_\perp - \varepsilon)}{4\pi|X - Y|} \delta(t - \tau - \frac{|X - Y|}{c_0}) dS(y) dr \\
&= - \frac{1}{4\pi|X|} \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S v_n(y, \tau) \delta(t - \tau - \frac{|X|}{c_0} + \frac{x \cdot Y}{c_0}) dS(y) dr \\
&\quad (X \cong x, |x| \rightarrow \infty) \\
&= - \frac{1}{4\pi|X|} \int_{-\infty}^{+\infty} \oint_S v_n(y, \tau) \left\{ \delta\left(t - \tau - \frac{|X|}{c_0}\right) + \delta'\left(t - \tau - \frac{|X|}{c_0}\right) \frac{x_j \cdot Y_j}{c_0} \right\} dS(y) dr
\end{aligned}$$

ただし、プライムは時間についての微分を表す。 τ についての積分を実行すれば

$$\varphi(x, t) \cong - \frac{1}{4\pi|X|} \oint_S v_n\left(y, t - \frac{|X|}{c_0}\right) dS(y) - \frac{x_j}{4\pi c_0 |X|^2} \frac{\partial}{\partial t} \oint_S v_n\left(y, t - \frac{|X|}{c_0}\right) Y_j' y dS(y)$$

最初の積分は、指向性のない単極子音を表し、 S で囲まれた体積が時間的に変化する場合のみ（すなわち、拍動物体の場合のみ）ゼロでない。その時、それは遠方場の音の重要な成分である。2番目の積分は $O(\frac{wl}{c_0}) \ll 1$ 倍だけ小さい ($\partial/\partial t \sim w, Y_j \sim l$) であるので。

単極子項は、例えば、速度 $U(t)$ で微小振幅の一方向振動をしている固体ではゼロになる。その場合

$$v_n(y, \tau) = n(y) \cdot U(r) = n_i(y) U_i(r)$$

となる。

ただし、 $n(y)$ は表面から流体中へ向かう法線ベクトルである。

$$Y_i = y_j - \varphi_j^*(y)$$

を2番目の積分に代入すると、

$$\begin{aligned}
\varphi(x, t) &\cong - \frac{x_j}{4\pi c_0 |X|^2} \frac{\partial U_i}{\partial t} \left(t - \frac{|X|}{c_0} \right) \oint_S n_i(y) Y_i(y) dS(y) \\
&= - \frac{x_j}{4\pi c_0 |X|^2} \frac{\partial U_i}{\partial t} \left(t - \frac{|X|}{c_0} \right) \oint_S [n_i y_j - n_i \varphi_j^*] dS(y)
\end{aligned}$$

で与えられる双極子型の音場が得られる。

例：振動球

原点を中心とする半径 a の剛体球が y_1 方向に速度 $U(t)$ で振動している場合を考える。

そのとき、 $U = (u, 0, 0)$ であり、式 (3.8.3)、(3.8.4) に於いて、 $i = 1$ とする。

球座標では

$$y = r(\cos\theta, \sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi)$$

であるから、球表面で

$$Y = y\left(1 + \frac{a^3}{2|y|^3}\right) = \frac{3a}{2}(\cos\theta, \sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi)$$

$$n_1 = \cos\theta$$

したがって、

$$\oint_S n_1 Y_j dS = \frac{3a^3}{2} \oint_S (\cos\vartheta, \sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi) \cos\vartheta \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$= \begin{cases} 2\pi a^3, & j = 1 \\ 0, & j = 2, 3 \end{cases}$$

であり、式 (3.8.3) は

$$\varphi(x, t) \cong \frac{-a^3 \cos\theta}{2c_0|x|} \frac{\partial U}{\partial t} (t - |x|/c_0). \quad |x| \rightarrow \infty$$

となり、また

$$\frac{x_1}{|x|} = \cos\theta$$

である。

7.4 音叉と共鳴箱と響胴

7.4.1 音叉と共鳴箱

音叉セットと、共鳴箱付きの音叉で、幾つか確認してみました。使用したのは、下の物です。

楽器・音響機器 > アクセサリ > チューナー



↑



画像にマウスを合わせると拡大されます



この他に、30 cm*30 cmのベニヤ板も用意しました。

理科の実験で、共鳴箱の上に立てられた音叉を叩いたことがあると思います。下についている箱は共鳴箱と呼ばれます。

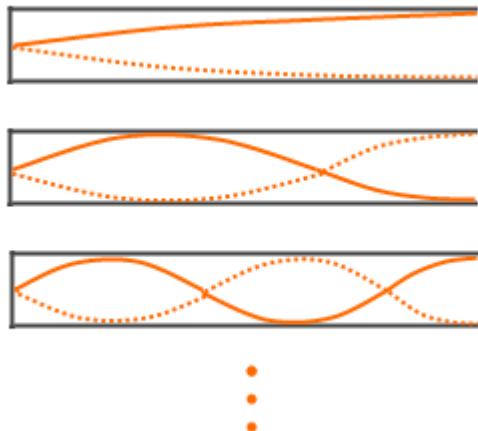
上についている音叉は、440Hz のもので、共鳴箱 長さ 180mm×幅 94mm×高さ 54mm 程度が普通です。

音速は $331.5+0.6t$ m/s、 $331.5+0.6*15=340$ m です。

長さ $18 \text{ cm} * 4 * \text{周波数 } 440 \text{ Hz} = 31680 \text{ cm} = 317 \text{ m}$ となります。18 cm に少しオマケして、 $(18+1.5)*4*440=34320 \text{ cm}=343 \text{ m}$ となります。

共鳴箱の気柱の長さが波長 λ の $1/4$ であり、気柱共鳴が起こっていると考えられます。

閉管の固有振動については、



閉口端は空気分子が動けないので固定端となり、定常波における節となります。

もう一方の開口端は空気分子が自由に動けるので自由端となり、定常波における腹となります。

片端が節、もう片端が腹という制約があるので定常波の形状パターンは左図のようになります。*

$\frac{1}{4}$ 波長 が 1 つの振動を基本振動、

$\frac{1}{4}$ 波長が 3 つの振動を 3 倍振動、

$\frac{1}{4}$ 波長が 5 つの振動を 5 倍振動、

... といいます。

閉管は奇数倍 ($2n-1$) の振動しかできません。2 倍振動、4 倍振動といった偶数倍の振動はありません。

$2n-1$ ($n=1,2,3,\dots$) は m ($m=1,3,5,\dots$) と表現しても構いません。どちらも同じ意味です。奇数、ということです。

と説明されるのが普通です。

箱付きの音叉での共鳴も確認しました。

共振現象の内、音に関するものを共鳴といいます。



同じ固有振動数を持つ共鳴箱付き音叉（おんさ）を 2 つ用意して、片方を鳴らします。すると、もう片方も鳴り始めます。叩かれた音叉が下の共鳴箱を揺らし、空気を伝わって隣の共鳴箱を揺らし、上の音叉を揺らして鳴らします。

固有振動数が違う音叉同士では共鳴は起こりません。

7.4.2 強制振動と響胴

左の音叉セットには、共鳴箱が無いので、ハンマーで叩いても、小さな音しか出ませんが、振動している音叉をベニヤ板にくっつけると音が大きくなりました。大きな音の振動数は音叉の振動数です。

音叉セットは8本の音叉からなっています。ベニヤ板にも固有振動数はあるのでしょうか、それとは関係なく、ベニヤ板は、くっつけた音叉の振動数の音を大きく響かせるのです。すなわち、響板として機能するのです。

箱付きの音叉から、音叉を引き抜いて、開口部を上に向けて立てました。上の縁に、音叉セットの音叉を叩いてからくっつけます。

ベニヤ板の時のように、くっつけた音叉の音が大きくなり、音の周波数は叩いた音叉の周波数です。
開口部に本を近づけると、音の大きさは変化しますが、周波数は変化しません。

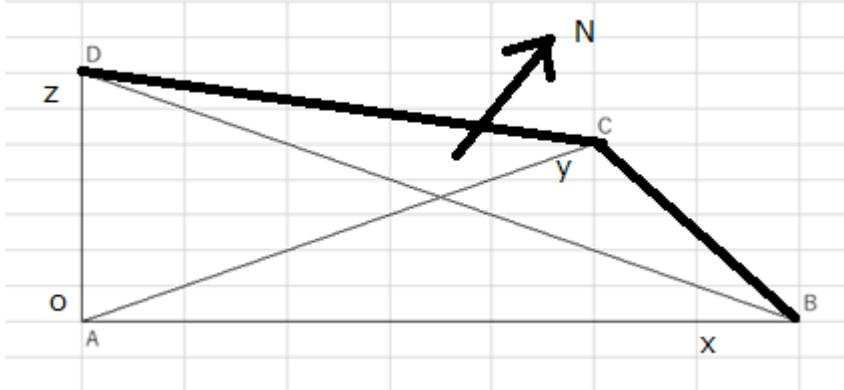
これは、箱の部分も、箱の中の気柱も、くっつけた音叉の周波数で振動している事を意味しています。強制振動が起こっているのです。共鳴箱としてではなくて、空气中に振動を拡散するための、響胴として機能しているのです。

7.4.3 共鳴箱の底と中

7.5 等方性物質と波動方程式

比熱比や音速については、岩波講座現代物理学の基礎 I 、古典物理学 I に詳しい記述がある。
音速と波動方程式について確認しておきます・

最初は応力です。



上の三角錐 ABCD の面 ACD、ABD、ABC、BCD の面積をそれぞれ S_x 、 S_y 、 S_z 、 S と書く。これらの面に外側から働く力が、単位面積あたり T_x 、 T_y 、 T_z 、 T_s (ベクトル) だとして、その成分表示が

$T_x = (T_{xx}, T_{xy}, T_{xz})$, $T_y = (T_{yx}, T_{yy}, T_{yz})$, $T_z = (T_{zx}, T_{zy}, T_{zz})$, $T_s = (T_{sx}, T_{sy}, T_{sz})$
だする。

この三角錐に単位体積当たり M の外力 (重力など) が加わっているとして、この物体が静止状態または等速運動をしているならば、 $F = m \alpha = 0$ より

$$T_x S_x + T_y S_y + T_z S_z + T_s S + M V = 0$$

となる。

この式から、

$$-T_s = (T_x S_x + T_y S_y + T_z S_z + M V) / S$$

$S_x / S = \ell$ 、 $S_y / S = m$ 、 $S_z / S = n$ 、とすれば、 ℓ, m, n は面 S の法線ベクトル N の成分で、 $N = (\ell, m, n)$ となる。

面 S を平行に保ったまま縮小してゆけば、 $V / S \Rightarrow 0$ となるので、 $S \rightarrow 0$ の極限において、

$$T = -T_s = T_x \ell + T_y m + T_z n$$

を得る。成分で表示すれば

$$T_x = T_{xx} \ell + T_{xy} m + T_{xz} n$$

$$T_y = T_{yx} \ell + T_{yy} m + T_{yz} n$$

$$T_z = T_{zx} \ell + T_{zy} m + T_{zz} n$$

となる。この T が応力です。

応力テンソルとは、

$$T_x = (T_{xx}, T_{xy}, T_{xz}), T_y = (T_{yx}, T_{yy}, T_{yz}), T_z = (T_{zx}, T_{zy}, T_{zz}), T_s = (T_{sx}, T_{sy}, T_{sz})$$

において、 x 、 y 、 z を 1、2、3 で書き換えたものを並べて、

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

と並べたもの（あるいは要素の列）です。

この成分の変換を考えます、原点を共有する2つの正規直行座標系 Σ 、 Σ' を考えて、座標変換によるベクトル成分の変換で、 Σ で、 $X=(x_1, x_2, x_3)$ 、とあらわされていたものが、 Σ' で、 $X'=(x'_1, x'_2, x'_3)$ とあらわされ、

$$x'_i = \sum a_{ik} x_k$$

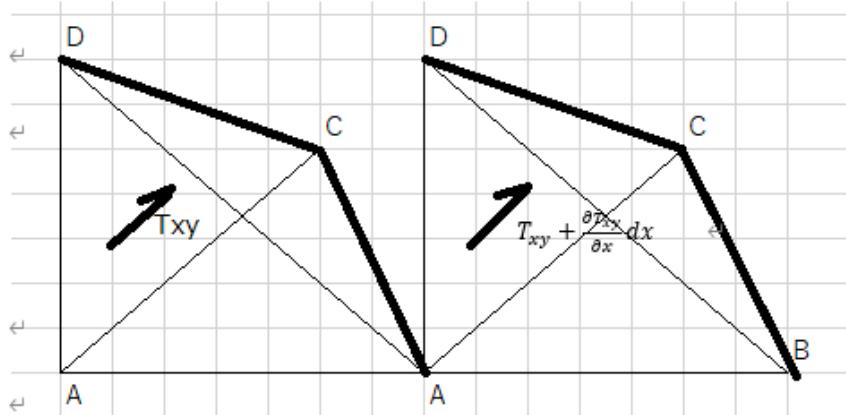
と変換されるときには、

$$T'_{ij} = \sum a_{ik} a_{jm} T_{km}$$

と変換されます。座標変換の行列と上記の関係があるので、 T は2階のテンソルです。

さらに、三角錐が回転しないならば、回転モーメントは0である、

回転モーメントのつり合いを考えることで、応力が対称性を持つことが分かります。



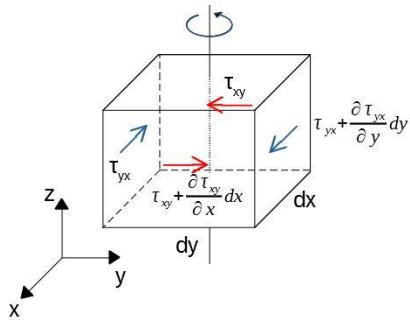
上の図の、左の三角錐の面ACDにかかる力のうちy軸方向の成分を T_{xy} とすれば、右の三角錐の面ACDにかかる力は dx だけ平行移動したこと考えて、

$$T_{xy} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} dx$$

と書ける。これは、右の三角錐の面ACDにかかる力なので、下のような直方体で考えれば、反作用として直方体の面ACDには

$$-(T_{xy} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} dx)$$

の力がかかる。



回転軸を上の図のようにとて、この2つの力による回転モーメントを考えれば、

$$-T_{xy}dydzdx/2 - (T_{xy} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x}dx)dydzdx/2$$

面ABDについても同様に考えると、

$$\frac{T_{yx}dxdzdy}{2} + (T_{yx} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y}dy)dxdzdy/2$$

となる。回転しないのだから、この和が0になる。

$$-\frac{T_{xy}dydzdx}{2} - \frac{\left(T_{xy} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x}dx\right)dydzdx}{2} + \frac{T_{yx}dxdzdy}{2} + \frac{\left(T_{yx} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y}dy\right)dxdzdy}{2} = 0$$

両辺を $dxdydz$ で割り、 $dx, dy \rightarrow 0$ の極限をとると

$$-T_{xy} + T_{yx} = 0$$

x 面、 y 面についても同様にすれば、 $T_{yz}=T_{zy}$, $T_{zx}=T_{xz}$ も成立して、応力テンソルの対称性が分かる。

ひずみ

物体に外力が働くと内部に応力が生ずることを見た。この時、物体は外力が無い場合に比べて変形しているはずである。変形としては、伸び縮み、あるいは捩じれが起こっている。変形の度合いが小さい場合について、連続体の変形の様子を考える、

物体内の任意の2点 P, Q について、 P, Q が変形後に P' , Q' に移動したとする。

空間に固定した座標系をとったときの各点の座標を

$$P : (x, y, z)$$

$$Q : (x + \angle x, y + \angle y, z + \angle z)$$

$$P' : (x + u, y + v, z + w)$$

$$Q' : (x + \angle x + u + \angle u, y + \angle y + v + \angle v, z + \angle z + w + \angle w)$$

とすれば、2点間の距離の2乗の差は

$$|P'Q'|^2 - |PQ|^2 = 2(\angle x, \angle u) + (\angle u, \angle u) \quad (3.3.1)$$

となる。 $\mathbf{u}(u, v, w)$ 、 $\mathbf{u} + \angle \mathbf{u}$ をそれぞれ、 P 、 Q の変位ベクトルという。

$$\angle \mathbf{u} = (\angle u, \angle v, \angle w), \quad \angle \mathbf{x} = (\angle x, \angle y, \angle z)$$

連続的な変形を考えるとして、 u の各成分は (x,y,z) の連続関数であり、点 Q が点 P に十分近ければ、すなわち、 $|\Delta x|$ が十分小さければ、変位ベクトルの差 Δu の大きさも十分小さいとしてよい。

Δx の成分、 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ の一次式で近似すれば

$$\begin{aligned}\Delta u &= \xi_{xx} \Delta x + \xi_{xy} \Delta y + \xi_{xz} \Delta z \\ \Delta v &= \xi_{yx} \Delta x + \xi_{yy} \Delta y + \xi_{yz} \Delta z \\ \Delta w &= \xi_{zx} \Delta x + \xi_{zy} \Delta y + \xi_{zz} \Delta z\end{aligned}\tag{3.3.2}$$

と書ける。

これを、3.3.1 に代入すれば

$$\begin{aligned}|P'Q'|^2 - |PQ|^2 &= 2\{\zeta_{xx}(\Delta x)^2 + \zeta_{yy}(\Delta y)^2 + \zeta_{zz}(\Delta z)^2 \\ &\quad + \zeta_{yz}\Delta y\Delta z + \zeta_{zx}\Delta z\Delta x + \zeta_{xy}\Delta x\Delta y\}\end{aligned}\tag{3.3.3}$$

と書ける。ただし、

$$\zeta_{xx} = \xi_{xx} + (1/2)((\xi_{xx})^2 + (\xi_{yx})^2 + (\xi_{zx})^2)$$

$$\zeta_{yz} = \xi_{yz} + \xi_{zy} + \xi_{xy}\xi_{xz} + \xi_{yy}\xi_{yz} + \xi_{zy}\xi_{zz}$$

であり、他も同様 (x, y, z を循環させる。)

$\Delta \rightarrow d$ の極限操作によって、3.3.2 の係数は

$$\xi_{xx} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \xi_{xy} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \xi_{xz} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\xi_{yx} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \xi_{yy} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \xi_{yz} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\xi_{zx} \rightarrow \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \xi_{zy} \rightarrow \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \xi_{zz} \rightarrow \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\text{であるから、 } |P'Q'|^2 &\rightarrow (dS')^2, \quad |PQ|^2 \rightarrow (dS)^2 \text{ と置けば、3.3.3 は} \\ (dS')^2 - (dS)^2 &= 2\{\eta_{xx}(dx)^2 + \eta_{yy}(dy)^2 + \eta_{zz}(dz)^2 \\ &\quad + \eta_{yz}dydz + \eta_{zx}dzdx + \eta_{xy}dxdy\}\end{aligned}\tag{3.3.6}$$

ここで、

$$\eta_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + (1/2)(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2)$$

$$\eta_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}$$

.....

である。

$$(dS)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

に注意して、3.3.6 を変形すると、

$$\begin{aligned}(dS')^2 &= g_{xx}(dx)^2 + g_{yy}(dy)^2 + g_{zz}(dz)^2 \\ &\quad + g_{yz}dydz + g_{zx}dzdx + g_{xy}dxdy\}\end{aligned}$$

となる。

ここで、

$$g_{xx}(x,y,z) = 1 + 2\eta_{xx}$$

$$g_{yz}(x,y,z) = 2\eta_{yz}$$

.....

と置いた。

物質の変形（角度の変化や長さの変化）と g_{ij} の関係を調べておく。

空間に固定した座標系をとり、ここでの P の座標を(x,y,z)とする。

点 P を通る 3 つの単位ベクトルとそれぞれ x 軸、y 軸、z 軸に平行にとり、それらを e1,e2,e3 とする。

e1,e2,e3 の上に、それぞれ、P1,P2,P3 をとて、PP1=($\angle_x, 0, 0$)、PP2(0, $\angle_y, 0$)、PP3=(0,0, \angle_z)とする。

変形により、P,P1,P2,P3 はそれぞれ、 $P' : (x+u, y+v, z+w) = (x', y', z')$ 、P1'、P2'、P3'へ移る。

変移は各点ごとに、

$$u(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$$

で与えられるから、

$$P1'=((x+\angle_x)+u(x+\angle_x, y, z), y+v(x+\angle_x, y, z), z)+w(x+\angle_x, y, z))$$

$$P'=(x+u(x,y,z), y+v(x,y,z), z+w(x,y,z))$$

の差をとって、

$$P'P1' = (\angle_x + \frac{\partial u}{\partial x} \angle_x, \frac{\partial v}{\partial x} \angle_x, \frac{\partial w}{\partial x} \angle_x)$$

$$P'P2' = (\frac{\partial u}{\partial y} \angle_y, \angle_y + \frac{\partial v}{\partial y} \angle_y, \frac{\partial w}{\partial y} \angle_y)$$

$$P'P3' = (\frac{\partial u}{\partial z} \angle_z, \frac{\partial v}{\partial z} \angle_z, \angle_z + \frac{\partial w}{\partial z} \angle_z)$$

となり、

$$(P'P1', P'P1') = [1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial w}{\partial x})^2\}] (\angle_x)^2$$

$$(PP1, PP1) = [1] (\angle_x)^2$$

$$(P'P2', P'P3') = [\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \{\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z}\}] \angle_y \angle_z$$

$$(PP2, PP3) = 0 \angle_y \angle_z$$

となるので、 g_{xx} は単位ベクトル e1 (そこに乗っている PP1) が何倍に伸びるか、 g_{yz} は e2 と e3 のなす角の \cos が 0 からどの程度ずれるか (角が、直角からどの程度ずれるか) を示している。

3.3.2 を次のように変形して、変形の様子を調べておけば、3.3.2 より

$$\begin{bmatrix} \angle_u \\ \angle_v \\ \angle_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\xi_{xy} - \xi_{yx}) & \frac{1}{2}(\xi_{xz} - \xi_{zx}) \\ \frac{1}{2}(\xi_{yx} - \xi_{xy}) & 0 & \frac{1}{2}(\xi_{yz} - \xi_{zy}) \\ \frac{1}{2}(\xi_{zx} - \xi_{xz}) & \frac{1}{2}(\xi_{zy} - \xi_{yz}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \angle_x \\ \angle_y \\ \angle_z \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \xi_{xx} & \frac{1}{2}(\xi_{xy} + \xi_{yx}) & \frac{1}{2}(\xi_{xz} + \xi_{zx}) \\ \frac{1}{2}(\xi_{yx} + \xi_{xy}) & \xi_{yy} & \frac{1}{2}(\xi_{yz} + \xi_{zy}) \\ \frac{1}{2}(\xi_{zx} + \xi_{xz}) & \frac{1}{2}(\xi_{zy} + \xi_{yz}) & \xi_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \angle_x \\ \angle_y \\ \angle_z \end{bmatrix}$$

$$= \Delta u_R + \Delta u_D \quad 3.3.17$$

とおく。

$(\angle_x, \angle_u) = 0$, (\angle_u, \angle_u) は ξ_{xx} などの 2 次式なので、2 次の項を無視すれば、

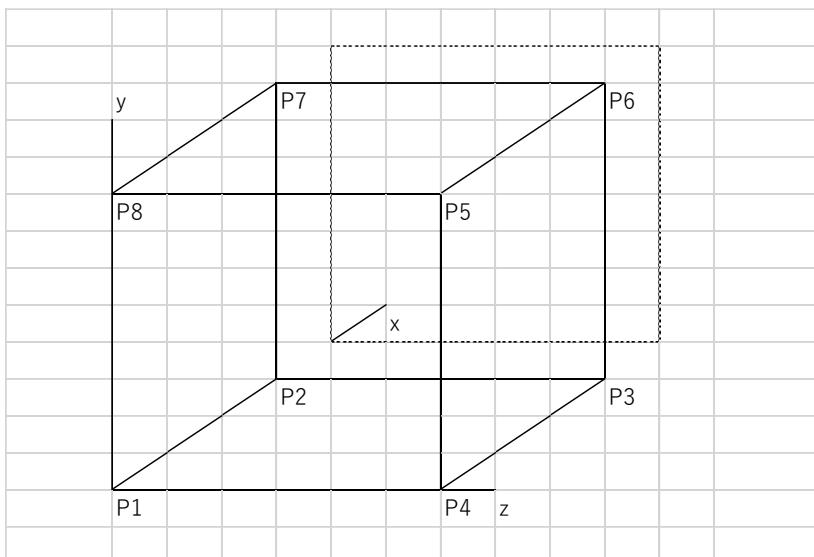
3.3.1 式の右辺は 0 となり、距離の変化が無いことを表す。

従って、3.3.17 を 3.3.1 に代入して、 ξ_{xx} などの 2 次以上の項を無視すれば、距離の変化に寄与するのは、 Δu_D の部分であることが分かる。

Δu_D の性質は、

3.3.2 式を手掛かりに考える。

3 辺が x 軸、y 軸、z 軸に沿って置かれた直方体を考える



8 個の頂点について、 $\angle u$ を計算してみる。

P が $P' = P + u$ に移るとき

$Q = P + \angle x$ は、 $Q' = P + \angle x + u + \angle u = Q + u + \angle u \sim$ 移る。

$\angle x = (\angle_x, \angle_y, \angle_z)$

と

$$\angle u = \xi_{xx} \angle x + \xi_{xy} \angle y + \xi_{xz} \angle z$$

$$\angle v = \xi_{yx} \angle x + \xi_{yy} \angle y + \xi_{yz} \angle z$$

$$\angle w = \xi_{zx} \angle x + \xi_{zy} \angle y + \xi_{zz} \angle z \quad (3.3.2)$$

$\angle u = (\angle u, \angle v, \angle w)$ に注意して各頂点の移動先を求めてみる。

(1) $\xi_{xx} \neq 0$, 他は 0 の場合

$$P_1 = (x, y, z), P_4 = (x, y, z + \angle z), P_5 = (x, y + \angle y, z + \angle z), P_6 = (x + \angle x, y + \angle y, z + \angle z),$$

P1 は $P1' = P1 + \mathbf{u}$ へ移り、

$P4 = (x, y, z + \angle z)$ は $P4' = P4 + \mathbf{u} + \angle \mathbf{u} = P4 + \mathbf{u}$ へ移る。 $(\angle x の部分が 0 だから)$

$P3(x + \angle x, y, z + \angle z)$ は $P3' = P3 + \mathbf{u} + \angle \mathbf{u} = P3 + \mathbf{u} + (\xi xx \angle x, 0, 0)$ へ移る。

$P5 = (x, y + \angle y, z + \angle z)$ は $P5' = P5 + \mathbf{u} + \angle \mathbf{u} = P5 + \mathbf{u}$ へ移る。 $(\angle x の部分が 0 だから)$

$P6 = (x + \angle x, y + \angle y, z + \angle z)$ は $P6' = P6 + \mathbf{u} + \angle \mathbf{u} = P6 + \mathbf{u} + (\xi xx \angle x, 0, 0)$ へ移る。

$$P4P5 = (x, y + \angle y, z + \angle z) - (x, y, z + \angle z) = (0, \angle y, 0)$$

$P4'P5' = (P5 + \mathbf{u}) - (P4 + \mathbf{u}) = P4P5 = (0, \angle y, 0)$ で移動後の長さの変化は無い。

$$P5P6 = (x + \angle x, y + \angle y, z + \angle z) - (x, y + \angle y, z + \angle z) = (\angle x, 0, 0)$$

$$P5'P6' = P6 + \mathbf{u} + (\xi xx \angle x, 0, 0) - (P5 + \mathbf{u}) = P5P6 + (\angle x + \xi xx \angle x, 0, 0)$$

となる。他の場合も同様なので、移動後に、直方体の形は、 x 軸方向に $(1 + \xi xx)$ 倍された形になる。

辺の長さ $\angle x$, が $\angle x + \xi xx \angle x$, となる。

ξxx を x 軸方向の伸び率という。

(2) $\xi xy \neq 0$, 他は 0 の場合

点 $P1, P4, P3, P2$ については、 $\angle y = 0$ なので、 $\angle \mathbf{u} = 0$

点、 $P5, P6, P7, P8$ については、 $\angle x = (*, \angle y, *)$ の形なので、 $\angle \mathbf{u} = (\xi xy \angle y, 0, 0)$ となる。

これは、移動後に、直方体の下の面に対して、上の面が x 軸方向に $\xi xy \angle y$, だけずれることを意味する。

すなわち、直方体の面のうち、 $y z$ 平面に平行な平行な面が x 軸の正の方向に Θ だけ傾き、

$\tan \Theta = \xi xy$ となり、 Θ が小さければ $\Theta = \tan \Theta = \xi xy$ となり、面の傾きの角は ξxy だと言える。

(3) $\xi yx \neq 0$, 他は 0 の場合

この場合は、(2) の場合と同様で、 y 軸に垂直な 2 つの面が、 xz 平面に対して角 ξyx だけ傾くことを意味する。

(4) $\xi xy \neq 0, \xi yx \neq 0$, 他は 0 の場合

$$\angle \mathbf{u} = \xi xy \angle y$$

$$\angle v = \xi yx \angle x$$

$$\angle w = 0$$

$P4 = (x, y, z + \angle z)$ は $P4' = P4 + \mathbf{u} + \angle \mathbf{u} = P4 + \mathbf{u}$ へ移る。 $(\angle x, \angle y の部分が 0 だから)$

$P5 = (x, y + \angle y, z + \angle z)$ は $P5' = P5 + \mathbf{u} + \angle \mathbf{u} = P5 + \mathbf{u} + (\xi xy \angle y, 0, 0)$ へ移る。

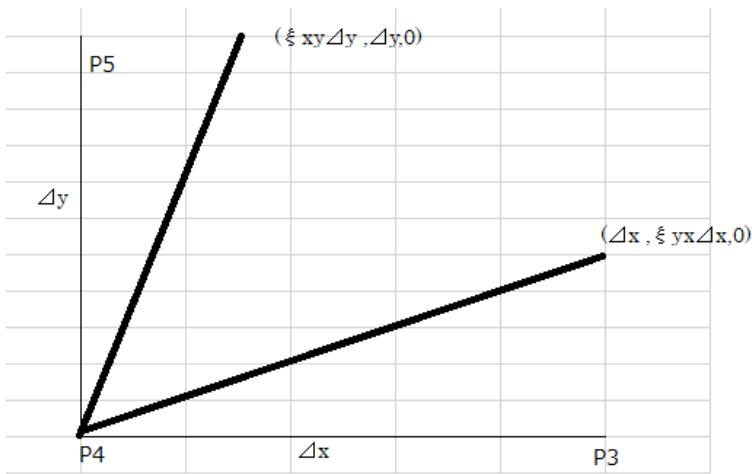
$$P4P5 = (x, y + \angle y, z + \angle z) - (x, y, z + \angle z) = (0, \angle y, 0)$$

$$P4'P5' = (P5 + \mathbf{u} + (\xi xy \angle y, 0, 0)) - (P4 + \mathbf{u}) = P4P5 + (\xi xy \angle y, 0, 0) = (\xi xy \angle y, \angle y, 0)$$

$P4 = (x, y, z + \angle z)$ は $P4' = P4 + \mathbf{u} + \angle \mathbf{u} = P4 + \mathbf{u}$ へ移る。 $(\angle x, \angle y の部分が 0 だから)$

$P3 = (x + \angle x, y, z + \angle z)$ は $P3' = P3 + \mathbf{u} + \angle \mathbf{u} = P3 + \mathbf{u} + (0, \xi yx \angle x, 0)$ へ移る。

$$P4'P3' = P3 + \mathbf{u} + (0, \xi yx \angle x, 0) - P4 - \mathbf{u} = (\angle x, 0, 0) + (0, \xi yx \angle x, 0) = (\angle x, \xi yx \angle x, 0)$$



となるので、 $(\xi xy + \xi yx)$ は x 軸、y 軸にそれぞれ平行な 2 つの面のなす角の変化を表す。これを、ずれひずみ という。

$\Delta \rightarrow d$ の極限操作によって、

$$\xi_{xx} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \xi_{xy} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \xi_{xz} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\xi_{yx} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \xi_{yy} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \xi_{yz} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\xi_{zx} \rightarrow \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \xi_{zy} \rightarrow \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \xi_{zz} \rightarrow \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\Delta u = \xi_{xx} \Delta x + \xi_{xy} \Delta y + \xi_{xz} \Delta z$$

$$\Delta v = \xi_{yx} \Delta x + \xi_{yy} \Delta y + \xi_{yz} \Delta z$$

$$\Delta w = \xi_{zx} \Delta x + \xi_{zy} \Delta y + \xi_{zz} \Delta z$$

よって、

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

$$d\mathbf{u}_D = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

と書いて、

ひずみテンソル $\{e_{xx}, e_{xy}, \dots\}$ を得る。この変換は応力テンソル T の変換と同じである。

応力とひずみの関係

内部のひずみと応力が比例するとのフックの法則を拡張して、

3.2.6 の T の対称性を仮定して考えることにする。 e_{xy} などは定義より対称となっている。

$$\begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{yz} \\ T_{zx} \\ T_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{61} & c_{62} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \\ e_{xy} \end{bmatrix}$$

3.4.1

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{61} & c_{62} & c_{66} \end{bmatrix}$$

とおく。この係数 c_{ij} を弾性スティフネスという。

逆に解いたものは、

$$\begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \\ e_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} \\ s_{61} & s_{62} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{yz} \\ T_{zx} \\ T_{xy} \end{bmatrix}$$

では、 s_{ij} を弾性コンプライアンスと呼ぶ。

応力と弾性ポテンシャル

変形が準静的に行われているとすれば、外力は常に応力と釣り合っていて、応力は 3.4.1 によって、ひずみテンソルの 6 個の成分で表される。変形の状態は、6 個の独立変数の組で作られる 6 次元の直行座標空間で表すのが便利である。

そこで、各辺が dx, dy, dz で与えられる立方体が外力を受けて変形し、その変形の状態が P(exx, eyy, ...) で表されて、この状態からさらに変形して、P'(exx+dexx, eyy+deyy, ...) で表される状態に変化するまでに外力が行う仕事は、次のように計算できる。

変形①

$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \xi_{xx}$ であり、単位長辺りのひずみ表すので、x 軸方向のひずみが de_{xx} だけ増加し、変形は、

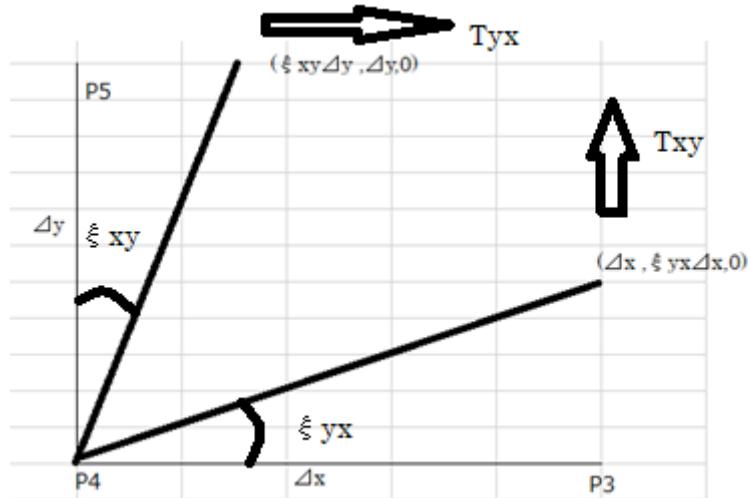
$e_{xx}dx$ から、 $(e_{xx} + de_{xx})dx$ となり、新たな変形分は、 $de_{xx}dx$ である、この新たな変形を受ける面積は $dydz$ 、単位面積当たりの力は T_{xx} なので、この面に働く力は $T_{xx}dydz$ 、

状態変化によって、この面に対してなされた新たな仕事は、 $T_{xx}dydzd_{xx}dx$ である。

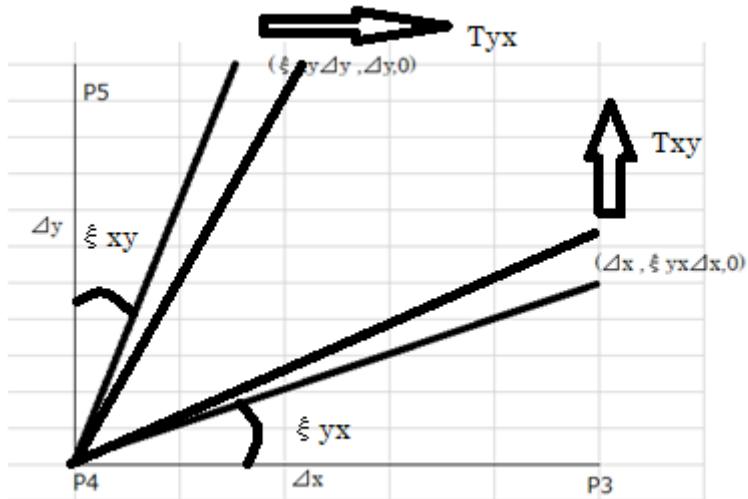
変形②

2枚の面が動いて、挟み込むような変形をする倍については、 $\xi_{xy} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}$ 、 $\xi_{yx} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}$

より、 $e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (\xi_{xy} + \xi_{yx})$ と考えて計算する。



その変形の状態 $P(exx,eyy,\dots)$ が上の図で表されて、この状態からさらに変形して、下の図で表されるとき、 $P'(exx+dexx, eyy+deyy, \dots)$ の状態に変化するまでに外力が行う仕事は、次のように計算できる。



縦の面がさらに右に倒れるときに、その変形の原因となる、上の面にかかる相対的な力は、 $T_{xy}dxdz$ 、この力は P_5 に作用して、傾斜角を $d(\xi_{xy})$ だけ増加させるので、追加される仕事は $d(\xi_{xy})dy$ なので、新たになされた仕事は、 $T_{xy}dxdz * d(\xi_{xy})dy$ 、

底面の右側が、さらに持ち上がる原因となる相対的な力は、 $T_{xy}dydz$ 、 P_3 の移動距離は $d(\xi_{yx})dx$ だけ増えるので、新たになされた仕事は、 $T_{xy}dydz * d(\xi_{yx})dx$

この和は、対称性を考慮して、

$$\begin{aligned} & T_{xy} dx dz * d(\xi xy) dy + T_{xy} dy dz * d(\xi yx) dx \\ & = T_{xy} dz dx dy (\xi xy + \xi yx) \\ & = T_{xy} dz dx dy 2 de_{xy} \end{aligned}$$

を得る。

これは、z 軸を挟む場合であり、x 軸、y 軸を挟む場合を考えると、

$$\begin{aligned} W(P \rightarrow P') &= T_{xx} dy dz d_{xx} dx + T_{yy} dz dx de_{yy} dy + T_{zz} dx dy de_{zz} dz \\ &+ T_{yz} dx dy * 2 * de_{yz} dz + T_{zx} dy dz * 2 * de_{zx} dx + T_{xy} dz dx * 2 * de_{xy} dy \quad 3.4.4 \end{aligned}$$

となる。

外力のなした仕事が、熱として失われること無く、変形が可逆的に行われるならば、変形前の状態 $P(0,0,0,\dots)$ から、 $P'(exx, eyy, \dots)$ に至るまでの仕事は、その経路によらないはずである。

積分が経路のよらないための必要十分条件は、

$$W(P \rightarrow P') = dW dx dy dz$$

$$= \left(\frac{\partial W}{\partial e_{xx}} de_{xx} + \frac{\partial W}{\partial e_{yy}} de_{yy} + \frac{\partial W}{\partial e_{zz}} de_{zz} + \frac{\partial W}{\partial e_{yz}} de_{yz} + \frac{\partial W}{\partial e_{zx}} de_{zx} + \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} de_{xy} \right) dx dy dz \quad 3.4.5$$

と書かれることである。

(微分方程式論、福原、佐藤著、共立 117 ページ)

3.4.4 と 3.4.5 を比較して、

$$T_{xx} = \frac{\partial W}{\partial e_{xx}}, \quad T_{yy} = \frac{\partial W}{\partial e_{yy}}, \quad \dots$$

が成立する。

3.4.1 に注意すれば、

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial e_{yy}} = c_{12} = \frac{\partial W}{\partial e_{yy} \partial e_{xx}} = \frac{\partial T_{yy}}{\partial e_{xx}} = c_{21}$$

...

などが得られて、C の要素は対称となる。

$$c_{ij} = c_{ji} \quad (i,j = 1,2,3) \text{ および } (i,j = 4,5,6)$$

$$c_{ij} = 2c_{ji} \quad (i = 1,2,3 ; j = 4,5,6) \quad 3.4.3$$

が成立する。

さらに、空間の対称性を考える。

原点を共有する、2つの正規直行座標系 Σ 、 Σ' を考えて、座標変換によるベクトル成分の変換で、 Σ で、 $X=(x_1, x_2, x_3)$ 、とあらわされていたものが、 Σ' で、 $X'=(x'_1, x'_2, x'_3)$ とあらわされ、

$$x'_i = \sum a_{ik} x_k$$

と変換されるときには、

$$T'_{ij} = \sum a_{ik} a_{jm} T_{km}$$

と変換される2階テンソルであった。

応力テンソルとひずみテンソルの関係を座標系 Σ における成分表示で、 $T=CE$ 、座標系 Σ' における成分表示での関係を、 $T'=C'E'$ と書く。

座標系の Σ から Σ' への変更による、2階テンソルの成分の変換を $T'=UT$ 、 $E'=UE$ とすれば、

$T=CE$ は $U^(-1)T'=CU^(-1)E'$ すなわち、 $T'=UCU^(-1)E'$ となる。物質や空間にこの変換に対する対称性があれば、どの座標系で表現しても、応力とひずみの関係は同じであるから、

$$T'=UCU^(-1)E'=CE$$

$$\text{すなわち}, UCU^(-1)=C, \text{よって}, UC=CU$$

が成立しなくてはならない。

z 軸の周りの $\pi/2$ の回転での対称性で、 $c_{11}=c_{22}, \dots$

x 軸の周りでの $\pi/2$ の回転での対称性で、 $c_{11}=c_{22}=c_{33}$ 、 $c_{12}=c_{23}=c_{31}, \dots$

さらに、 z 軸の周りの角 Θ の回転での対称性と考えると、

$$c_{11}-c_{12}=c_{44}$$

などの条件が加わって、

ラメの定数

$$\lambda=c_{12}, \mu=(1/2)c_{44}$$

を用いると、

完全等方性物質については

$$C = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}$$

となる。

等方性物質の場合の弾性ポテンシャルは

$$\frac{\partial W}{\partial e_{xx}} = T_{xx} = (\lambda + 2\mu)e_{xx} + \lambda e_{yy} + \lambda e_{zz},$$

$$\text{積分すれば}, W = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)e_{xx}^2 + \lambda e_{yy}e_{xx} + \lambda e_{zz}e_{xx} + C$$

$$\frac{\partial W}{\partial e_{yy}} = T_{yy} = \lambda e_{xx} + (\lambda + 2\mu)e_{yy} + \lambda e_{zz}, \dots$$

$$\text{積分すれば、 } W = \lambda e_{xx} e_{yy} + \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) e_{yy}^2 + \lambda e_{zz} e_{yy} + C$$

...

と調べてゆけば、

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \lambda (\sum_{i=1}^3 e_{ii})^2 + \mu (\sum_{i,j=1}^3 e_{ij}^2) \\ &= \frac{1}{2} [\lambda (+\mu (\sum_{i,j=1}^3 e_{ij}^2))] \\ &= \frac{1}{2} [\lambda (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z})^2 + 2\mu \{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2 + (\frac{\partial w}{\partial z})^2\} + \mu \{(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})^2\}] \end{aligned}$$

3.4.27

が条件を満たすことが分かる。

等方性物質の場合の応力とひずみの関係は

$$\begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{yz} \\ T_{zx} \\ T_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \\ e_{xy} \end{bmatrix}$$

なので、下の3つの式より、応力が、面に対して垂直に働く力だけの時は、ずれ e_{yz} などは生じないことが分かる。

上の3式より、

$$\begin{aligned} e_{xz} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} T_{xx} \\ e_{yy} = e_{zz} &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} T_{xx} \end{aligned}$$

となる。これは、引っ張って延びれば細くなり、押して縮めば太くなる。ことを意味する。

ポワソン比 σ を

$$\sigma = -\frac{e_{yy}}{e_{xx}} = \frac{\lambda}{3(\lambda + \mu)}$$

ヤング率 E を

$$E = \frac{T_{xx}}{e_{xx}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

ときめる。

体膨張率 $\Theta = e_{xz} + e_{yy} + e_{zz}$ と応力の関係は

$$T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} = (3\lambda + 2\mu)\Theta$$

となる。(ただし、 $(1+e_{xz})(1+e_{yy})(1+e_{zz}) = 1 + (e_{xz} + e_{yy} + e_{zz}) +,$ となるので Θ は体積膨張率)

弾性ポテンシャルは、外力が物体に対してなした仕事が内部エネルギーとして蓄えられた場合の、単位体積あたりのエネルギーなので、

この蓄えられたエネルギーの物質全体での総和 I を弾性エネルギーと呼ぶ。

$$I = \iiint_V W\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots\right) dx dy dz$$

総和は上の式となる。

ここで、物体の点(x,y,z)が変形によって、 $\mathbf{u}(x,y,z)=(u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z))$ なる変位を受けるとする。

物体の境界面 Γ での変位、 $\mathbf{u}(x,y,z)$; ($(x,y,z) \in \Gamma$) が与えられた時の、 Γ で囲まれた物質 V 全体での変位での変位 $\mathbf{u}(x,y,z)$; ($(x,y,z) \in V$) を決定する。

力学では、釣り合いの状態にある系のポテンシャルエネルギーは極小値をとるので、変位 $\mathbf{u}(x,y,z)$ を少し変化させ

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(x,y,z) &= (u'(x,y,z), v'(x,y,z), w'(x,y,z)) \\ &= (u(x,y,z) + \epsilon \xi(x,y,z), v(x,y,z) + \epsilon \eta(x,y,z), w(x,y,z) + \epsilon \zeta(x,y,z)) \end{aligned}$$

であり、

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

これに対する物質全体のエネルギーは、

$$I' = \iiint_V W\left(\frac{\partial u'}{\partial x}, \frac{\partial u'}{\partial y}, \dots\right) dx dy dz$$

となり、 I が極小値ならば、

$$I' - I \geq 0 \quad 3.5.4$$

$$I' - I = \iiint_V \left\{ \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \epsilon \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)} \epsilon \frac{\partial \xi}{\partial y} + \dots + \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)} \epsilon \frac{\partial \xi}{\partial z} \right\} dx dy dz$$

物質の表面での変位は最初に与えられた状態で変化しないとしたので、

$$\Gamma \text{ で } \xi(x,y,z) = \eta(x,y,z) = \zeta(x,y,z) = 0$$

の条件が付く。 V が直方体のようなイメージで考えて、さらに、積分を分けて、それぞれ最初の積分を適当な軸の方向に行うと考えて、部分積分をすれば、

$$I' - I =$$

$$-\epsilon \iiint_V \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)} \right) \right) \xi + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)} \right) + \dots \right\} \eta + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)} \right) + \dots \right\} \zeta \right\} dx dy dz,$$

3.5.4 が任意の関数 ξ 、 η 、 ζ について成立するためには

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)} \right) \right\} = 0$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)} \right) + \dots \right\} = 0$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)} \right) + \dots \right\} = 0$$

3.5.6

が必要である。

このあとは、 Γ 上での与えられた条件をみたす $\mathbf{u}(x,y,z)$ を求めることになる。

等方性物質の場合は W が次の式となる。

$$W = \frac{1}{2} [\lambda (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z})^2 + 2\mu \{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2 + (\frac{\partial w}{\partial z})^2\} + \mu \{(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})^2\}]$$

平面波の場合を考えると、

変位ベクトル u を、 x と t だけの関数と見ることができる。その時は、

$$W = \frac{1}{2} [(\lambda + 2\mu)(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + \mu \{(\frac{\partial w}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2\}]$$

となるので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)} \right) &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)} \right) + \dots &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)} \right) + \dots &= \mu \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} \end{aligned}$$

を得る。

運動を伴う物質系を考える。この系の運動エネルギーと弾性ポテンシャルエネルギーの総和が保存される場合を考える。

全体の運動エネルギーは、時刻 t での物体の各部分の変位を $\mathbf{u}(x,y,z,t)$ と置けば、微小部分 $dxdydz$ の密度を $\rho(x,y,z)$

とすると、微小部分の質量は $\rho dxdydz$ となり、 $1/2$ と速度の 2 乗を掛けて、

$$\frac{1}{2} \rho dxdydz \{ (\frac{\partial u}{\partial t})^2 + (\frac{\partial v}{\partial t})^2 + (\frac{\partial w}{\partial t})^2 \}$$

となり、

物質系全体の運動エネルギー T は

$$T = \int_V \frac{1}{2} \rho \{ (\frac{\partial u}{\partial t})^2 + (\frac{\partial v}{\partial t})^2 + (\frac{\partial w}{\partial t})^2 \} dxdydz$$

となり、

系の弾性ポテンシャルエネルギーは、

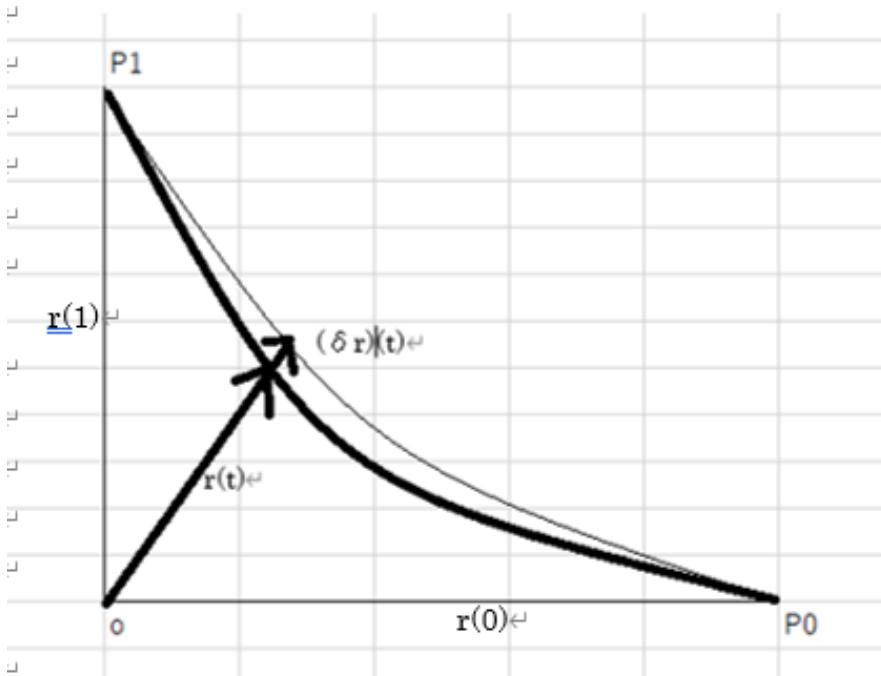
$$U = \iiint_V W(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots) dxdydz$$

保存系では、 $L=T-U$ としたときに、ラグランジュの原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

が成立する。

理由は、



質点の運動については

$$m \frac{d^2r}{dt^2} = f \quad 2.7.1$$

が成立する。

上の図において、 $t = t_0$ で、動径 r_0 で与えられる点 P_0 に有った質点が力 f を受けながら、太い線で示された軌道に沿って移動し $t = t_1$ で、動径 r_1 で与えられる点 P_1 に来たとする。

この軌道から少し離れた軌道（細い線）に移ったと考える。

細い線の軌道に移るためになされる仕事を考える。

t_0 と t_1 の間の任意の時刻 t における軌道の位置が動径 r であるとき、新しい軌道に移るのに必要な変位は δr 、であり、軌道変更の為に力 f が質点に対してなす仮想的な仕事は、

$$\delta W = f \delta r \quad 2.7.2$$

だと考える。

t から $t + \delta t$ の間での、 $\frac{dr}{dt} \delta r$ の微小時間 δt 間の変化は

$$(\frac{dr}{dt} \delta r)_{t+\delta t} - (\frac{dr}{dt} \delta r)_t = (\frac{dr}{dt} + \frac{d^2r}{dt^2} dt)(\delta r + \frac{d(\delta r)}{dt} dt) - (\frac{dr}{dt} \delta r)_t$$

$$= (\frac{d^2r}{dt^2} \delta r + \frac{dr}{dt} \frac{d(\delta r)}{dt}) dt$$

となるので、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \delta r \right) = \frac{d^2 r}{dt^2} \delta r + \frac{dr}{dt} \frac{d(\delta r)}{dt} \quad 2.7.4$$

が成立する。 $\delta \left(\frac{dr}{dt} \right)$ を微小量と考えて、 $\frac{d(\delta r)}{dt} = \delta \left(\frac{dr}{dt} \right)$ とすれば、

$$\delta \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} + \delta \left(\frac{dr}{dt} \right) \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(2 \frac{dr}{dt} \delta \left(\frac{dr}{dt} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(\delta \left(\frac{dr}{dt} \right) \right)^2 = \left(\frac{dr}{dt} \delta \left(\frac{dr}{dt} \right) \right) \quad 2.7.5$$

これを、2.7.4に代入して、m倍すれば

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dr}{dt} \delta r \right) = m \frac{d^2 r}{dt^2} \delta r + \delta \left(\frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right)$$

となる。

実際の軌道に関しては、3.7.1が成立する。

運動エネルギー $T = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2$ と置けば。

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dr}{dt} \delta r \right) = \delta W + \delta T \quad 2.7.8$$

となる。2.7.8を積分して、

$$0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} (W + T) dt \quad 2.7.9$$

この式は、実際の軌道が、W+Tの時間積分が極小値をとるようなものであることを意味している。これを変分原理という。

もし、fが保存力で、位置エネルギーVとの間に

$$f = -\text{grad } V \quad 2.7.10$$

の関係があるときには、

$$\delta W = f \delta r = -\text{grad } V \cdot \delta r = -\delta V$$

となるので、2.7.9は、

$$0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} (-V + T) dt$$

となって、

$$L = T - U$$

と置けば、

$$0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt$$

となる。

物質系全体の運動エネルギーTは $T = \int_V \frac{1}{2} \rho \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dx dy dz$ となり、

系の弾性ポテンシャルエネルギーは、 $U = \iiint_V W \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots \right) dx dy dz$

保存系では、 $L=T-U$ としたときに、ラグランジュの原理 $\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$ が成立する。

に戻れば、

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_V [\frac{1}{2} \rho \{ (\frac{\partial u}{\partial t})^2 + (\frac{\partial v}{\partial t})^2 + (\frac{\partial w}{\partial t})^2 \} - W] dx dy dz dt = 0$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_V W dx dy dz dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta \int_V W dx dy dz) dt$$

力学では、釣り合いの状態にある系のポテンシャルエネルギーは極小値をとるので、

変位 $\mathbf{u}(x,y,z)$ を、少し変化させ

$$\mathbf{u}'(x,y,z) = (u'(x,y,z), v'(x,y,z), w'(x,y,z))$$

$$= (u(x,y,z) + \epsilon \xi(x,y,z), v(x,y,z) + \epsilon \eta(x,y,z), w(x,y,z) + \epsilon \zeta(x,y,z))$$

$$\text{としたとき、 } \frac{\partial w'}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\delta \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial \xi}{\partial x}, \delta \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial \eta}{\partial x}, \delta \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w'}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$\delta \left(\frac{dr}{dt} \right) = \epsilon \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)$$

$$\delta \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right) = \left(\frac{dr}{dt} \delta \left(\frac{dr}{dt} \right) \right) = \epsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)$$

これを、2.7.4 に代入して、m倍すれば

これに対する物質全体のエネルギーは、

$$I' = \iiint_V W \left(\frac{\partial u'}{\partial x}, \frac{\partial u'}{\partial y}, \dots \right) dx dy dz$$

となり、

$$\begin{aligned} \int_V \delta W dx dy dz &= \iiint_V \left\{ \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}, \epsilon \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)} \epsilon \frac{\partial \xi}{\partial y} + \dots + \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)} \epsilon \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right\} dx dy dz \\ &= -\epsilon \iiint_V \left(\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)} \right) \right\} \xi + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)} \right) + \dots \right\} \eta + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)} \right) + \dots \right\} \zeta \right) dx dy dz, \end{aligned}$$

3.5.4 が任意の関数 ξ 、 η 、 ζ について成立するためには

$$\delta \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} + \delta \left(\frac{dr}{dt} \right) \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(2 \frac{dr}{dt} \delta \left(\frac{dr}{dt} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(\delta \left(\frac{dr}{dt} \right) \right)^2 = \left(\frac{dr}{dt} \delta \left(\frac{dr}{dt} \right) \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \delta r \right) = \frac{d^2 r}{dt^2} \delta r + \frac{dr}{dt} \delta \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{d^2 r}{dt^2} \delta r + \delta \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \delta r \right) - \frac{d^2 r}{dt^2} \delta r \right) dt = 0 - \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d^2 r}{dt^2} \delta r \right) dt$$

$$\rho \frac{d^2 r}{dt^2} \delta r = \rho \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \varepsilon \xi + \frac{d^2 v}{dt^2} \varepsilon \eta + \frac{d^2 w}{dt^2} \varepsilon \zeta \right)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_V [\rho \delta \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right) - \delta W] dx dy dz dt = 0$$

$$-\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \int_V \left[\rho \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \xi + \frac{d^2 v}{dt^2} \eta + \frac{d^2 w}{dt^2} \zeta \right) - \right.$$

$$\left. \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)} \right) \right\} \xi + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)} \right) + \dots \right\} \eta + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)} \right) + \dots \right\} \zeta \right] dx dy dz dt = 0$$

が任意の ξ 、 η 、 ζ に関して成立するには、

$$\rho \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)} \right)$$

$$\rho \frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)} \right) + \dots$$

$$\rho \frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)} \right) + \dots \quad 3.6.7$$

が条件である。

等方性物質に関しての右辺は計算済みで、方程式は

$$\rho \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)} \right) = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \right)$$

$$\rho \frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)} \right) + \dots = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x}$$

$$\rho \frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)} \right) + \dots = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x}$$

となる。これは、波動方程式である。

7.6 热力学

热力学第一法則

(1) 第一法則を表す式

エネルギーの保存則を熱力学第一法則と呼ぶ。

これは、物体の持っている内部エネルギーの総量は外部とのやり取りが無い限り不変であり、外とのやり取りがある場合には、その増加は外から入った熱量 Q と、この物体に対して外からなされる力学的仕事 W との和に等しいという内容を含んでいる。

物体が状態 1 にあるときの内部エネルギーを U_1 、状態 2 にあるときの内部エネルギーを U_2

とすると、1 から 2 に移る間にその物体が外からもらうエネルギーは

$$U_2 - U_1 = JQ + W \quad (1)$$

で与えられる。これは、熱力学第一法則を式で表したものである。

式で仕事を J または erg で、熱量を k cal または cal で表すときには、換算率 (J) が必要となるが、両者を共通の単位で表すことには関係ない。§ 1.6 の項で述べた状態量であり、数学的には全微分である。

$$U_2 - U_1 = Q + W \quad (2)$$

と書くことができる。

(1)、(2) 式の仕事と熱量は状態 1 から状態 2 への変化の過程によって違ってくるが、

$Q + W$ すなわち、 $U_2 - U_1$ は考へている物体の状態が決まれば一義的に決まるもので、途中の道筋には関係しない。§ 1.6 の項で述べた状態量であり、数学的には全微分である。

Q 、 W が微小な量であり、それに対応する微小な状態量の変化を次の式で表す。

$$dU = Jd'Q + d'W \quad (3)$$

で表す。ここで、 U は状態量、 Q, W は非状態量である。

準静的に仕事と熱を与えた場合を考える。すなわち、物体が一様な圧力 p を受けていて、これが体積を dV だけ体積を準静的に増すとき、物体の受ける仕事は § 1.6 の項より

$$d'W = -pdV \quad (4)$$

で与えられる。

$$dU = Jd'Q - pdV \quad (5)$$

内部エネルギーと熱容量

一様な物体の内部エネルギーが状態変数（温度、体積）のどんな関数であるかを知るには、熱容量（物体 1 g をとれば比熱）を測ればよい。

物体は準静的変化をしているとして、(5) 式用いて熱容量を調べよう。

1 k mol の物体の状態が温度 T と体積 V とで決まるものとする。(5) 式は、

$$d'Q = dU + pdV \quad (8)$$

と書ける。

状態の温度が、 dT だけ変化したとすると、(8) 式の両辺を dT で割って、 $d'Q/dT$ 作れば、これが、物体の温度を 1 度上げるのに必要な熱量を表すので、熱容量 C である。

$$C = \frac{d'Q}{dT} = \frac{dU}{dT} + p \frac{dV}{dT} \quad (9)$$

となる。

ところが、温度の上昇だけを指定しても、終わりの状態は決まらない。dU、dVは決まらない。終わりの状態が決まるように温度の上げ方を指定して初めてCの値がくる。

たとえば、体積一定と言う条件をつけると、終わりの状態の温度と体積が決まるから、状態が確定する。内部エネルギーは状態によって決まる量であるから、この場合の内部エネルギーは温度と体積の関数である。

従って、温度dT、体積dVの変化に対して、内部エネルギーUは

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right) dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right) dV \quad (10)$$

だけます。

(8) 式に(10)式を代入して、

$$\begin{aligned} d'Q &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right) dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right) dV + pdV \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right) dT + \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right) + p \right\} dV \end{aligned} \quad (11)$$

を得る。したがって、熱容量Cは(11)式を(9)式に代入して、

$$C = \frac{d'Q}{dT} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right) + \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right) + p \right\} \left(\frac{dV}{dT}\right)_a \quad (12)$$

となる。ここで、 $\left(\frac{dV}{dT}\right)_a$ とした部分は、変化のさせ方によって変わる量であることを意味する。

(1) 定積変化

この場合、体積の変化が無いのだからdV=0であり、従って、 $\left(\frac{dV}{dT}\right)_a = 0$ となる。

この時のCを C_v と書いて、定容熱容量（定積熱容量）（質量が1gならば定容比熱、定積比熱）と呼ぶ。(12)式から

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right) \quad (13)$$

となる。

(2) 定圧変化

この場合の熱容量を定圧熱容量（質量が1gならば定圧比熱）と呼ぶ。(12)式において、Cを C_p と書いて $\left(\frac{dV}{dT}\right)_a = \left(\frac{dV}{dT}\right)_p = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ （この記号は、圧力pを一定に保ったまま温度を上げたとき、体積の増加する割合を意味する。）とおけば、

$$C_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right) + \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right) + p \right\} \left(\frac{dV}{dT}\right)_a = C_v + \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right) + p \right\} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad (14)$$

を得る。普通は、 $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ の大きさを単位体積当たりに変換した値、 $\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ で考えて、体膨張率と言って、通常は α で表す。

すなわち、

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \quad (15)$$

(15) 式を用いて、 $\alpha V = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ として、(14) 式に代入すると、

$$C_p - C_v = \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right) + p \right\} \alpha V \quad (16)$$

が得られる。

(13)、(16) より、

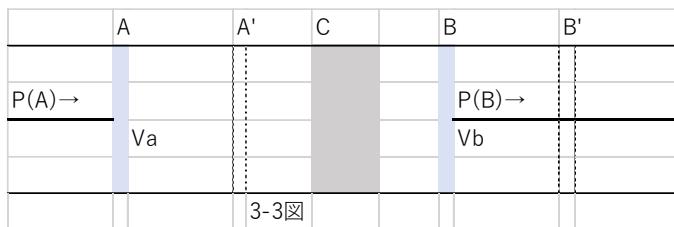
$$\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v = C_v$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{C_p - C_v}{\alpha V} - p$$

と書けるから、実験によって、 C_v 、 C_p 、 α が V, T の関数として求まれば、 $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ 、 $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v$ が T, V の関数として求まる。

エンタルピー (Gibbs の熱関数) と定圧熱容量

2つの容器 A、B にそれぞれ気体を詰めて、それらをつないで、つなぎ目にピストンと栓を付ける。これら全体を断熱材で覆って、外部との熱の出入りを遮断する。



3-3 図

3-3 図のように、外部からの熱の出入りを完全に遮断できる壁で作った管の一部に綿などで作った多孔性の物質を詰めた細孔栓 (図の C の部分) を置き、AC 間に一定の気体を入れ、圧力を一定に保ちながらピストン A をゆっくりと押してゆくと、多孔質の栓を通過するとき圧力が低下して CB 間に流れて行く。ピストンを連続的にはたらかせて、管内の気体の移動が定常的になるようにして、A 側と B 側での圧力 p_A 、 p_B ($p_A > p_B$) および温度 T_A 、 T_B 、を測定する。

多孔質の栓を通過することにより、気体の状態がどのように変化するかを考えるのに、AB 間の気体の部分が A'B'間に進んだとする。結果として、AA'間の気体が、BB'間に移ったのと同等である。

いま、AA'間および、BB'間の体積を V_a 、 V_b とすれば、この時が外力が気体に対してなした仕事は、 $p_A V_a$ であり、気体が外部に対してなした仕事は $p_B V_b$ である。したがって正味気体が外部からなされて仕事 W は

$$W = p_A V_a - p_B V_b$$

である。

この間に外部からの熱の出入りはないから、 $Q = 0$ 、従って、第一法則によってこの仕事は、この間ににおける気体の内部エネルギーの増加に等しい。ゆえに、

$$U_B - U_A = p_A V_a - p_B V_b$$

(最初の状態では、B が C に接していたとすると、全体のエネルギーは U_A のみ、最後に A が C に接したとすれば全体のエネルギーは U_B のみ、)

$$U_B + p_B V_b = U_A + p_A V_a$$

となる。この関係は、細孔栓の実験において、 p_A 、 p_B の値によらず成り立つだから、

$$U + pV = H$$

と置くことができる。これを、Gibbsの熱関数またはエンタルピーとよぶ。

U および、 pV が状態量なので、 H も状態量である。

理想気体の比熱

1 g の理想気体の比熱を計算する。理想気体が準静的な変化をしているときの第一法則を書けば §3.3 の (5) 式 $dU = Jd'Q - pdV$ より、1g の物質を考慮して文字を小文字にして表記すると、

$$Jd'q = du + pdv \quad (5)$$

となる。比熱は

$$c = \frac{d'q}{dT} = \frac{1}{J} \frac{du}{dT} + p \frac{dv}{dT}$$

となる。

まず、定容比熱（定積比熱）を求める。体積が一定なので、 $dv=0$ であるから、

$$c_v = \frac{1}{J} \left(\frac{du}{dT} \right)_V \quad (3)$$

となる。

定圧比熱については、

$$c_p = \frac{1}{J} \left\{ \left(\frac{du}{dT} \right)_p + p \left(\frac{dv}{dT} \right)_p \right\} \quad (4)$$

を得る。

一方、1 g の理想気体の状態方程式は分子量を μ とすると、(μ g で 1 mol の分子数なので、1 g だと $1/\mu$ mol) 気体定数 R について（0°C、1.013×105Pa(1atm) の状態を標準状態とよぶ。）

標準状態では 1mol の気体の占める体積は、気体の種類には関係が無く一定になります。（アボガドロの法則）

標準状態で 1mol (分子 6.02×10^{23} 個) の気体の体積は、22.4(L) で決まっています。

標準状態で 1mol の気体の体積は 22.4L なので、ボイル・シャルルの法則の関係式に値を代入すると、

$PV=nRT$ で、 $P=1.013 \times 10^5$ 、 $V=22.4$ 、 $T=273$ （絶対温度、0°Cのこと）

$$PV/T = 1.013 \times (10^5) \times 22.4 / 273 = 8.31 \times (10^3)$$

となり、この値が気体定数 R です。

気体、1gのときは、1gが $1/\mu$ モルなので、

$$pv = \frac{R}{\mu} T \quad (5)$$

となる。この場合の R は 1 mol当たりの気体定数の値である。

(3) 式の中の $\left(\frac{dv}{dT} \right)_p$ を (5) 式を使って計算すると、

$$(4) \quad \left(\frac{dv}{dT}\right)_p = \frac{R}{p\mu}$$

となるから、この値を(4)式に代入し、(3)式 $c_v = \frac{1}{J} \left(\frac{du}{dT}\right)_V$ に注意して、さらに、 $\left(\frac{du}{dT}\right)_p = \left(\frac{du}{dT}\right)_V$

と仮定すれば、

$$c_p = c_v + \frac{R}{J\mu}$$

あるいは、

$$c_p - c_v = \frac{R}{J\mu}$$

が得られる。

理想気体 1 molについて考えると、(

$$(c_p - c_v)J = R$$

となる。

理想気体の等温変化と断熱変化

一般に、ある物体系の温度を一定に保って、外部と釣り合いを保ったままの状態で進行する変化（準静的な変化）を等温変化という。

1 g の理想気体の状態方程式は

$$pv = \frac{R}{\mu}T$$

である。等温変化であるから、状態方程式は

$$pv = \text{一定}$$

第一法則は § 3.3 (5) 式より、

$$Jd'q = du + pdv \quad (12)$$

となる。等温変化であるから、内部エネルギーは一定であるから、 $du=0$ 、従って、

$$Jd'q = pdv \quad (13)$$

となり、気体が外部から吸収した熱量だけ外部に対して仕事をする。

内部エネルギーの変化は、仕事を行うことと、熱することによる。

(力学的エネルギー+内部エネルギー) の増加 = なされた仕事 + 吸収した熱

であり、等温変化では、左辺の値は 0 と考えられる。

吸収した熱がプラスなので、外部からなされた仕事の部分がマイナスとなる。これは気体が外部に対して仕事をしたことを意味する。

体積が、 v_1 から v_2 まで変化するときの変化が、準静的等温変化 ((13) 式に従った変化) であれば、気体の吸収する熱量 Q は

$$Q = \int_1^2 d'q = \frac{1}{J} \int_{v_1}^{v_2} pdv = \frac{RT}{J\mu} \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} = \frac{RT}{J\mu} \log \frac{v_2}{v_1}$$

となる。 $v_1 < v_2$ のときは、等温的に膨張して熱を吸収する。 $v_1 > v_2$ の時には、等温圧縮となり、熱を放出する。

断熱変化

一般に、ある物体系がその状態を変化させるとき、外部と熱のやり取りを行わない場合、この変化を断熱変化という。

分子量 μ の理想気体 1 g が準静的かつ断熱的に変化する場合を考えると、第一法則より

$$Jd'q = du + pdv$$

となり、断熱変化なので、 $d'q=0$ となり、上の式は

$$du = -pdv \quad (15)$$

となる。

$dv > 0$ ならば、 $du < 0$ 、すなわち、膨張するときは内部エネルギーは減少し、それに等しいだけの

仕事を外部に対して行う。(3) 式より、 $c_v = \frac{1}{J} \left(\frac{du}{dT} \right)_V$

$$du = JC_v dT \quad (16)$$

であるから、

$$du = -pdv = JC_v dT$$

となり、

$$JC_v dT + pdv = 0 \quad (17)$$

一方、気体の状態方程式

$$pv = \frac{R}{\mu} T$$

と (7) 式

$$c_p - c_v = \frac{R}{J\mu}$$

より、

$$p = \frac{R}{v\mu} T = \frac{J(c_p - c_v)}{v} T$$

となる。

この式を (17) 式に代入して、

$$JC_v dT + \frac{J(c_p - c_v)}{v} T dv = 0$$

変形して、

$$\frac{dT}{T} + \frac{(c_p - c_v)}{C_v} \frac{dv}{v} = 0$$

となり、 $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ と置けば、

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dv}{v} = 0$$

となる。

積分して

$$\log T + (\gamma - 1) \log v = \log(Tv^{\gamma-1}) = \text{定数}$$

となり、

$$Tv^{\gamma-1} = C \quad (\text{一定}) \quad (22)$$

を得る。

$c_p - c_v = \frac{R}{J\mu} > 0$ の両辺を $c_v > 0$ で割ってみれば、 $\gamma > 1$ が成立する。

これは、理想気体が断熱変化をするときの T と v の関係であり、膨張すれば温度が下がり、圧縮すれば、温度が上がることを示している。

と気体の状態方程式 $p v = \frac{R}{\mu} T$ 、り、 $T = p v \frac{\mu}{R}$ となるので、これを (22) 式に代入して

$$p v \frac{\mu}{R} v^{\gamma-1} = C$$

$$p v^\gamma = \frac{R}{\mu} C = C'$$

を得る。

あるときに、圧力 p_0 、体積 v_0 、質量 m 、密度 ρ_0 であった気体の圧力を p 、体積を v 、質量を m (質量の変化ない) 密度 ρ とすれば、

$$p v^\gamma = p_0 v_0^\gamma$$

で

あ

り

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v} \right)^\gamma$$

また、

$$m = \rho v = \rho_0 v_0$$

より、 $\frac{v_0}{v} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)$ となるので、

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$$

を得る。

どのような流体であれ、渦無しかつ非圧縮性の条件さえ満たせば、その速度ポテンシャル Φ は定常、非定常を問わず Laplace の方程式の解になっている。ことが分かっている。それゆえ、(3.11.58) に現れる u^2/c^2 、 v^2/c^2 、 uv/c^2 、などは、圧縮性の影響を与えるものと見られる。より正確に言えばこれらの項は完全流体の圧縮性の効果として表れる。

c の意味を知るために、流体として理想気体をとり、断熱変化の状態方程式をとろう。すなわち低圧比熱 c_p と定積比熱 c_v の比

$$\gamma \equiv \frac{c_p}{c_v}$$

を用いた

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$$

を状態方程式として採用する。 γ は空気については約 1.4 である。

この式から、

$$dp = \gamma p \frac{d\rho}{\rho}$$

したがって、p 151 から

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$$

が得られる。

$$pv^\gamma = \frac{R}{\mu} C = C'$$

(23)

断熱変化の式 (23) で v を V と書くことにすると

$$pV^\gamma = C'$$

この両辺を V で微分すると

$$\frac{dp}{dV} V^\gamma + p\gamma V^{\gamma-1} = 0$$

$$dp = -p\gamma \frac{dV}{V}$$

この式と、

$$\Delta p = -K \frac{\delta v}{v}$$

を比較して、 $K = \gamma p$ を得る。また、 $\gamma = c_p/c_v$

γp が完全流体を弾性体とみなしたときの弾性定数 c_{11} に相当することは次のようにして示される。
流体の微小部分の密度は運動中に(160 ページ)

$$\frac{D}{Dt} \rho = \frac{\partial}{\partial t} \rho + (\mathbf{u}, \operatorname{grad} \rho)$$

に従って変化する。それゆえ、 dt 時間に行うその変化は

$$d\rho = \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho + (\mathbf{u}, \operatorname{grad} \rho) \right) dt$$

である。

ところが、連続方程式 (3.11.49) より、

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = -(u, \operatorname{grad} \rho) - \rho \operatorname{div} \mathbf{u}$$

であるから、

$$d\rho = -\rho \operatorname{div} \mathbf{u} dt$$

となる。

これを、(3.11.61) に代入すれば

$$dp = -\gamma p \operatorname{div} u dt$$

これは、体積圧縮率

$$-\operatorname{div} u dt$$

と圧力変化の関係を与える式に他ならない。

それゆえ、

$$c_{11} = \gamma p$$

が得られる。

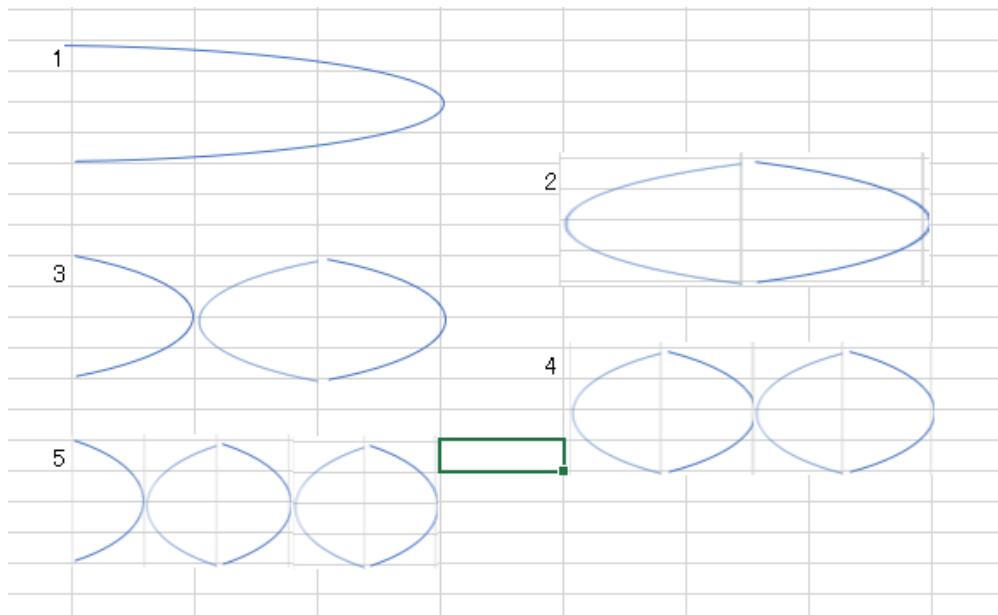
すなわち、 c は圧力 p における音波の速さを与える。

普通、

$$M \equiv \frac{\sqrt{(u, u)}}{c}$$

とおいて、 M を Mach 数と呼んでいる。

振動数は、



0.817Hzの2倍、3倍、、、は

1→0.817Hz、 2→1.634Hz、 3→2.451Hz、 4→3.268Hz、 5→4.085Hz、 6→4.902Hz、 7→5.719Hz、 8→6.356Hz
となります。

実際のピーク値は、

1→0.817Hz、 2→1.583Hz、 3→2.417Hz、 4→3.217Hz、 5→4.000Hz、 6→4.867Hz、 7→5.467Hz、 8→6.267Hz
超低周波音(0Hz～20Hz)の透過率が高いことと、一部はナセルの部分で反射すると考えれば良い。

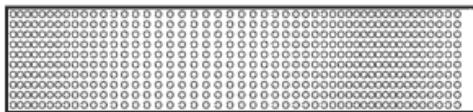
「房総かぜの丘」にある、出力 1500KW、タワー高さ 65m、ブレード直径 70.5m、ナセル重量 52トン

タワーの直径を3mとすれば、開口端補正は、 $\Delta l \doteq 0.6r$ (r は管の断面の半径) $0.6*3/2=1.8/2=0.9\text{m}$
 $65+0.9=65.9=66\text{m}$

さて、開口端補正の理由は

管の開口端の外側には、**大気圧**などの外気圧が当然存在します。開口端の**気圧**は**大気圧**に近いですが、多少**音圧**を持ちます。

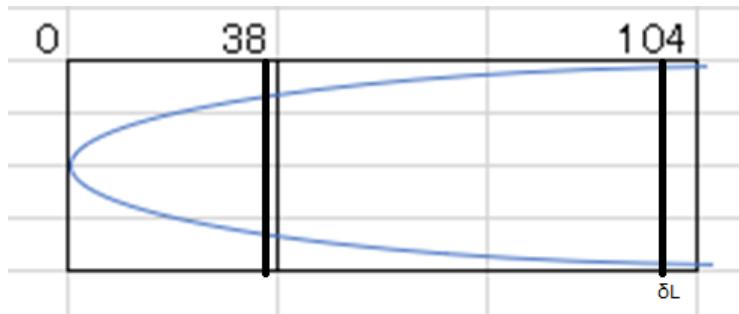
その**音圧**は、開口端の外側で一瞬で消える訳ではなく、球面状に広がって、**音圧**が弱まります。



よって、適度に**音圧**が分散した位置が開口端補正 Δl となります。

と言われています。

波長を決めるときには、左端の壁のある部分は動かないと言う条件で計算します。
もし、左端が少し振動する場合は、さらにその左側に仮の振動しない壁を想定する必要があります。
左の壁の動きによって、仮設の動かない壁の位置は変化します。



波長を λ として、塔の底が動かないなら、 $\lambda/4=66\text{m}$ となって、 $\lambda=264\text{m}$ 、周波数は $340/264=1.29\text{Hz}$ です。

逆に、(補正した)開口端から仮の動かない壁までの距離を $x \text{ m}$ とすると、
 $\lambda/4=x$ 、 $\lambda=4x$ 、 $340/4x=0.816667\text{Hz}$ 、 $x=104.1\text{m}$ となり、差は $104.1-66=38.1\text{m}$ です。

$\sin((\pi/2)/104.1)x)$ は、 $x=104.1$ で1、 $x=38.1$ では、0.54 です。

空気の密度 ρ は、0°C、1気圧 (101325 Pa) の時に、1.251 (kg/m³)

われわれの周囲の気圧は1気圧 (1013.25 hPa (ヘクトパスカル)) つまり 101325 Pa (パスカル) 程度。

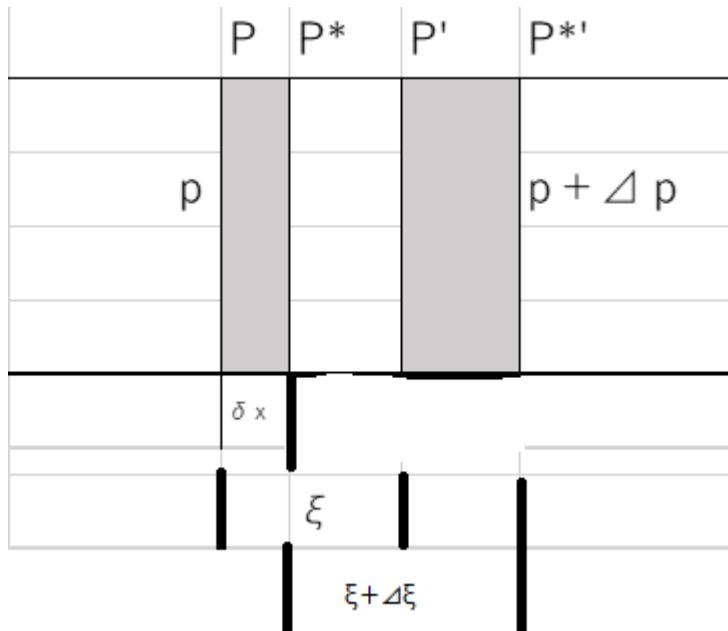
気圧が $P = P_0 + a \sin \omega t$ のように時間 t とともに変化すると音と感じる。

周波数 $f = \omega / (2\pi)$ は、20 Hz (ヘルツ) から 20000 Hz くらいの範囲が聞こえる。

a は振幅だが、音の大きさについていいうときは実効値 (RMS 値) $a/\sqrt{2}$ を考える。この実効値が 1000 Hz で 20 μ Pa (マイクロパスカル) あたりがぎりぎり聞こえる音なので、通常これを 0 dB (デシベル) の音と定める。実効値がこの 10 倍の音が 20 dB, 100 倍の音が 40 dB, 1000 倍の音が 60 dB である。

日常の音 (テレビから 1 m 離れたくらいの音) は 60 dB くらい、つまり実効値 20mPa (ミリパスカル) 程度である。 $(20 * \log((20 * 10^{(-3)}) / ((20 * 10^{(-6)}))) = 20 * \log(10^3) = 60$

音による空気の密度 ρ , 圧力 P , 変位 ξ の関係を調べる。



音による圧力の変化 ΔP と密度の変化 $\Delta \rho$ には比例関係 $\Delta P = \kappa \Delta \rho$ がある。

x 軸方向に伝わる音を考えると、空気分子の x 軸方向の変位 $\xi(x)$ が x とともに変化すれば、

$(\rho + \delta \rho)(V + \delta V) = \rho V = M$ (質量が保存される) とすると、2 次の微小部分を無視して。

$\delta \rho V = -\rho \delta V$ 、となり、また $V = A^* \delta x$ なので、

$$\delta V = A \{(\delta x + \xi + \delta \xi - \xi) - \delta x\} = A \delta \xi$$

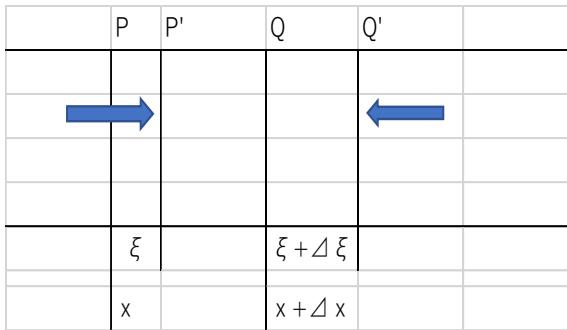
$$\delta \rho = -\rho (A \delta \xi) / (A \delta x)$$

密度 ρ は

$$\Delta \rho = -\rho \frac{\partial \xi(x)}{\partial x}$$

だけ変化する。

管の軸に沿って x 軸をとり、5-9図 (a) のように x 、 $x + \Delta x$ の位置に x 軸と垂直な断面、P, Qを考える。振動が起こって P 面は ξ だけ変位して P' へ、Q 面は $\xi + \Delta \xi$ だけ変位して Q' へ移動した状態で、P' 面と Q' 面に挟まれた部分の運動方程式を作ると、



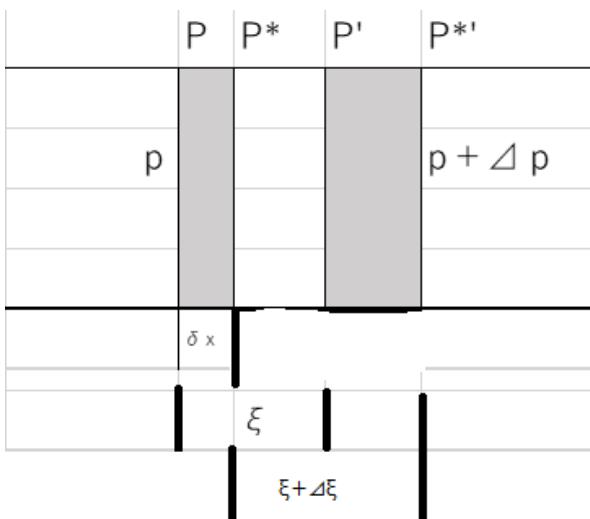
5-9図 (a)

管の断面積を A 、P' 面での圧力を P_1 、Q' 面での圧力を P_2 とすれば、

$$\rho A(\Delta x) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (p_1 - p_2)A \quad (1)$$

と書ける。ただし、気体の粘性や渦が発生することなどはすべて無視している。

P_1 、 P_2 に関しては次の様に考える。



5-9図 (b)

P 面から δx だけ離れた P^* 面を考え、P 面と P^* 面に挟まれた部分に着目する。5-9図 (b)。 δx は極めて小さく取っておく。P 面が ξ だけ変位した時 P^* 面は $\xi + \delta \xi$ だけ変位したとすると、PP* の部分の体積は、 $P'P^{**}$ へ移ったので

$$\delta v = A\{(\delta x + \xi + \delta \xi - \xi) - \delta x\} = A\delta \xi$$

だけ変化する。気体の体積弾性率を K とすると、

体積弾性率とは、

空気の粘性が無いとして考える。完全流体と見たとき、空間内の 1 点 (x, y, z) における密度を ρ_s 、流体の圧力を P_s と

する。音波が到着したとき、その密度が ρ 、圧力が P になったとする。

このとき、圧力の変化

$$\Delta p(t, x, y, z) = P - P_s$$

をその点の音圧という。

点 (x, y, z) に微小な体積 $\delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ を持った直方体を考える。これが、音波により、 $d(\xi, \eta, \zeta)$ という、変位を受けて、体積が $\delta V'$ になったとする。変形が十分小さいとして、形は直方体のままと考えて、

$$\begin{aligned}\delta V' &= (1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}) \Delta x \cdot (1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}) \Delta y \cdot (1 + \frac{\partial \zeta}{\partial z}) \Delta z \\ &= \Delta x \Delta y \Delta z (1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z})\end{aligned}$$

となる。

体積変化の割合は、

$$\Delta = \frac{\delta V' - \delta V}{\delta V} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \text{div } d$$

で与えられる。

質量の保存則より、 $\rho_s \delta V = \rho \delta V'$ が成立するので、 $\rho_s = \rho(1 + \Delta)$ となる。

また、密度変化の割合を s とすれば、 $\rho = \rho_s(1 + s)$ も成立する。

Δ と s が小さいとして 2 次以上の項を無視して、 $(1 + \Delta)(1 + s) = 1 + \Delta + s = 1$ より、
 $s = -\Delta$ となる。 Δ は膨張度、 s は圧縮度といわれる。

音の圧力を Δp とすると、

$$\Delta p = -K \Delta \quad (\text{体積が増えれば圧力は減する。})$$

となる。 K は**体積弾性率**である。

この部分の運動に関与する力は、圧力の場所による差であるから、粒子の速度ベクトルを、

$$u(u_x, u_y, u_z)$$
 とすると、これを微分したものが加速度であり、

微小部分の質量と加速度の積は、圧力差に等しいので、微小部分の面積を考えて

$$\rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\{p(x + \Delta x) - p(x)\} \Delta y \Delta z$$

を得る。この式から

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial u_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

すなわち、

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -grad(p)$$

を得る。この u は流体の微小部分が振動する速度であるので粒子速度とよばれる。また、微小部分の変位 $d(\xi, \eta, \zeta)$ は粒子の変位という。変位を時間で微分したものが速度なので各方向の変位を時間で微分すれば各方法の速度となる。よって、

この式から

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -K \frac{\partial}{\partial t} \Delta = -K \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = -K \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$$

となり、ベクトルで書くと $\frac{\partial p}{\partial t} = -K \operatorname{div}(u)$ となる。

これを、さらに t で微分して、

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -K \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{K}{\rho} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) = \frac{K}{\rho} \nabla^2 p$$

を得る。 $c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ とおけば、

$$p(t, x) = f(t - \frac{x}{c} - \frac{y}{c} - \frac{z}{c}) + g(t + \frac{x}{c} + \frac{y}{c} + \frac{z}{c})$$

が、解となる。

平面波を考えて、

$$p(t, x) = f(t - \frac{x}{c})$$
 について考えると、 $x=0$ で観測される音圧波形は、 $p(t, 0) = f(t)$

である。これと同じ音圧波形が x という位置で観測されるのは

$$p(t', x) = f(t' - \frac{x}{c}) = f(t)$$

$$t' = t + \frac{x}{c}$$

となり、

$x = c(t' - t)$ となるので、速度 c で波が x まで伝わったと考えられる。

ところで、

$$p(t, x) = f(t - \frac{x}{c} - \frac{y}{c} - \frac{z}{c}) + g(t + \frac{x}{c} + \frac{y}{c} + \frac{z}{c})$$

では、波の形が正弦波である理由は無い。同じ形の波が速度 c で伝わるというだけである。

この体積の変化の結果、 PP^* の部分の圧力は

$$\angle p = -K \frac{\delta v}{v} = -K \frac{\delta \xi}{\delta x}$$

だけ変化する。 δx を限りなく小さくした極限では

$$\angle p = -K \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

これは、気体内の任意の点での変位と圧力の化との関係を与える式である。従って

$$p_1 = p - K \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x$$

$$p_2 = p - K \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \angle x$$

ところで、 $(\partial \xi / \partial x)_x$ と書いたのは、位置 x における $(\partial \xi / \partial x)$ の値と言う意味である。これから、

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= K \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \angle x - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x \right\} \\ &= K \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)_x (\Delta x) - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x'} \right\} \\ &= K \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)_x (\Delta x) \end{aligned}$$

これを、(1) の右辺に代入し、添え字の x は一般的な場所と解釈できるので、それを省いて

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \quad (3)$$

を得る。摂動に伴う各部分の膨張、圧縮は速やかに行われる所以、断熱変化が起きると考えてよい。

断熱変化

一般に、ある物体系がその状態を変化させるとき、外部と熱のやり取りを行わない場合、この変化を断熱変化という。

分子量 μ の理想気体 1 g が準静的かつ断熱的に変化する場合を考えると、第一法則より

$$Jd'q = du + pdv$$

となり、断熱変化なので、 $d'q = 0$ となり、上の式は

$$du = -pdv \quad (15)$$

となる。

$dv > 0$ ならば、 $du < 0$ 、すなわち、膨張するときは内部エネルギーは減少し、それに等しいだけの仕事を外部に対して行う。(3) 式より、

$$c_v = \frac{1}{J} \left(\frac{du}{dT} \right)_V$$

$$du = JC_v dT \quad (16)$$

であるから、

$$du = -pdv = JC_v dT$$

となり、

$$JC_v dT + pdv = 0 \quad (17)$$

一方、気体の状態方程式

$$pv = \frac{R}{\mu} T$$

と (7) 式

理想気体の比熱

1 g の理想気体の比熱を計算する。理想気体が準静的な変化をしているときの第一法則を書けば § 3.3 の (5) 式 $dU = Jd'Q - pdV$ より、1g の物質を考慮して文字を小文字にして表記すると、

$$Jd'q = du + pdv \quad (5)$$

となる。比熱は

$$c = \frac{d'q}{dT} = \frac{1}{J} \frac{du}{dT} + p \frac{dv}{dT}$$

となる。

まず、定容比熱（定積比熱）を求める。体積が一定なので、 $dv=0$ であるから、

$$c_v = \frac{1}{J} \left(\frac{du}{dT} \right)_V \quad (3)$$

となる。

定圧比熱については、

$$c_p = \frac{1}{J} \left\{ \left(\frac{du}{dT} \right)_p + p \left(\frac{dv}{dT} \right)_p \right\}$$

(4)

を得る。

一方、1 g の理想気体の状態方程式は分子量を μ とすると、(μ g で 1 mol の分子数なので、1 g だと $1/\mu$ mol) 気体定数 R についてでは、(0°C、1.013×105Pa(1atm)の状態を標準状態とよぶ。)

標準状態では 1mol の気体の占める体積は、気体の種類には関係が無く一定になります。(アボガドロの法則)

標準状態で 1mol(分子 6.02×10^{23} 個)の気体の体積は、22.4(L)で決まっています。

標準状態で 1mol の気体の体積は 22.4L なので、ボイル・シャルルの法則の関係式に値を代入すると、

$PV=nRT$ で、 $P=1.013 \times 10^5$ 、 $V=22.4$ 、 $T=273$ (絶対温度、0°Cのこと)

$$PV/T = 1.013 \times (10^5) \times 22.4 / 273 = 8.31 \times (10^3)$$

となり、この値が気体定数 R です。

気体、1gのときは、1gが $1/\mu$ モルなので、

$$pv = \frac{R}{\mu} T \quad (5)$$

となる。この場合の R は 1 mol当たりの気体定数の値である。

(5) 式の中の $\left(\frac{dv}{dT} \right)_p$ を (5) 式を使って計算すると、

$$(6) \quad \left(\frac{dv}{dT} \right)_p = \frac{R}{p\mu}$$

となるから、この値を（4）式に代入し、（3）式 $c_v = \frac{1}{J} \left(\frac{du}{dT} \right)_V$ に注意して、さらに、 $\left(\frac{du}{dT} \right)_p = \left(\frac{du}{dT} \right)_V$

と仮定すれば、

$$c_p = c_v + \frac{R}{J\mu}$$

あるいは、

$$c_p - c_v = \frac{R}{J\mu}$$

が得られる。

$$c_p - c_v = \frac{R}{J\mu}$$

より、

$$p = \frac{R}{v\mu} T = \frac{J(c_p - c_v)}{v} T$$

となる。

この式を（17）式に代入して、

$$JC_v dT + \frac{J(c_p - c_v)}{v} T dv = 0$$

変形して、

$$\frac{dT}{T} + \frac{(c_p - c_v)}{C_v} \frac{dv}{v} = 0$$

となり、 $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ と置けば、

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dv}{v} = 0$$

となる。

積分して

$$\log T + (\gamma - 1) \log v = \log(Tv^{\gamma-1}) = \text{定数}$$

となり、

$$Tv^{\gamma-1} = C \quad (\text{一定}) \quad (22)$$

を得る。

$c_p - c_v = \frac{R}{J\mu} > 0$ の両辺を $c_v > 0$ で割ってみれば、 $\gamma > 1$ が成立する。

これは、理想気体が断熱変化をするときの T と v の関係であり、膨張すれば温度が下がり、圧縮すれば、温度が上がることを示している。

と気体の状態方程式 $pV = \frac{R}{\mu} T$ 、り、 $T = pV \frac{\mu}{R}$ となるので、これを（22）式に代入して

$$pv \frac{\mu}{R} v^{\gamma-1} = C$$

$$pv^\gamma = \frac{R}{\mu} C = C'$$

(23)

を得る。

あるときに、圧力 p_0 、体積 v_0 、質量 m 、密度 ρ_0 であった気体の圧力を p 、体積を v 、質量を m （質量の変化ない）密度 ρ とすれば、

$$pv^\gamma = p_0 v_0^\gamma$$

であり、

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^\gamma$$

また、

$$m = \rho v = \rho_0 v_0$$

より、 $\frac{v_0}{v} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$ となるので、

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$$

を得る。

断熱変化の式 (23) で v を V と書くことになると

$$pV^\gamma = C'$$

この両辺を V で微分すると

$$\frac{dp}{dV} V^\gamma + p\gamma V^{\gamma-1} = 0$$

$$dp = -p\gamma \frac{dV}{V}$$

この式と、

$$\angle p = -K \frac{\delta v}{v}$$

を比較して、 $K = \gamma p$ を得る。また、 $\gamma = c_p/c_v$

と書けるので、(3) は

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \gamma \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) = c^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)$$

となる。

これは、2回偏微分方程式であり、次の式

$$f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$$

はこの解であり、また、解は必ずこの形にかけることも分かる。（振動・波動 有山、104 ページ）

$$c^2 = \frac{\gamma P}{\rho}$$

空気の密度 ρ は、0°C、1気圧 (101325 Pa) の時に、1.251 (kg/m^3)、周囲の気圧は1気圧 (1013.25 hPa (ヘクトパスカル) つまり 101325 Pa (パスカル))、空気中の音速 340m/s を入れて計算すれば、
 $340*340=\gamma *101325/1.251$ より、 $\gamma = 1.427 \approx 1.4$ となる。

あるときに、圧力 p_0 、体積 v_0 、質量 m 、密度 ρ_0 であった気体の圧力を p 、体積を v 、質量を m (質量の変化ない) 密度 ρ とすれば、

$$pv^\gamma = p_0 v_0^\gamma$$

であり、

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^\gamma$$

また、

$$m = \rho v = \rho_0 v_0$$

より、 $\frac{v_0}{v} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$ となるので、

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$$

を得る。

どのような流体であれ、渦無しかつ非圧縮性の条件さえ満たせば、その速度ポテンシャル Φ は定常、非定常を問わず Laplace の方程式の解になっている。ことが分かっている。それゆえ、(3.11.58) に現れる u^2/c^2 、 v^2/c^2 、 uv/c^2 、などは、圧縮性の影響を与えるものと見られる。より正確に言えばそれらの項は完全流体の圧縮性の効果として表れる。

c の意味を知るために、流体として理想気体をとり、断熱変化の状態方程式をとろう。すなわち低圧比熱 c_p と定積比熱 c_v の比

$$\gamma \equiv \frac{c_p}{c_v}$$

を用いた

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$$

を状態方程式として採用する。 γ は空気については約 1.4 である。

この式を ρ で微分して、

$$dp = \gamma p \frac{d\rho}{\rho}$$

となるので、

$$\gamma = \left(\frac{dp}{p}\right) / \left(\frac{d\rho}{\rho}\right)$$

を得る。

密度 ρ は

$$\Delta\rho = -\rho \frac{\partial\xi(x)}{\partial x}$$

より、

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{\partial\xi(x)}{\partial x} = -\frac{\partial\xi(x)}{\partial t}/\frac{\partial x}{\partial t}$$

符号を無視して、

$$\frac{\Delta P/P}{(\partial\xi/\partial t)/v} = \gamma$$

を得る。

$\Delta P/P$ が実効値で $20\text{mPa}/10^5\text{Pa}=2*10^{-7}$ 程度とすれば、空気の変位の速度も音速の 10^{-7} 倍のオーダーである。

波動方程式は

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$
$$\frac{1}{c^2} = \kappa$$

とも書ける。(v は音速、常温で約 340 m/s)。

$$f_1(x-ct) + f_2(x+ct)$$

はこの解であり、また、解は必ずこの形にかけることも分かる。(振動・波動 有山、104 ページ)

$$f_1(x-c(t+1)) = f_1((x-c)-ct)$$

と書けるので、時刻($t+1$)時の位置 x での波の形は、時刻 t の時の位置($x-v$)での波の形と一致することが分かる。

これは、波の形が 1 秒間に v の速さで x 軸の正の方向に(右側に)移動することを意味する。

$$f_2(x+c(t+1)) = f_2((x+c)+ct)$$

と書けるので、時刻($t+1$)時の位置 x での波の形は、時刻 t の時の位置($x+c$)での波の形と一致することが分かる。

これは、波の形が 1 秒間に c の速さで x 軸の負の方向に(左側に)移動することを意味する。

例えば

$$\xi = a \sin \left(\omega \left(t \pm \frac{x}{c} \right) \right)$$

も解である。

7.7 波動方程式の解

c の意味を知るために、流体として理想気体をとり、断熱変化の状態方程式をとろう。すなわち低圧比熱 c_p と定積比熱 c_v の比

$$\gamma \equiv \frac{c_p}{c_v}$$

を用いた

等方性物質に関しての右辺は計算済みで、方程式は

$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)} \right) = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \right) \\ \rho \frac{d^2 v}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)} \right) + \dots = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} \\ \rho \frac{d^2 w}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)} \right) + \dots = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x}\end{aligned}$$

となる。これは、波動方程式である。

解を具体的に求めるには、変数が分離できて、

$$\xi(t, x) = X(x)T(t)$$

と仮定して代入すれば、

$$X(x) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = v^2 T(t) \left(\frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right)$$

両辺を $v^2 A(x)B(t)$ で割れば

$$\frac{1}{v^2 T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \frac{1}{X(x)} \left(\frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right)$$

となって、左辺は t の関数、右辺は x の関数。これらが等しくなるのは両辺が定数の場合だけなので、この共通の値を α とおけば、

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \alpha v^2 T(t)$$

$$\left(\frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right) = \alpha X(x)$$

となって、線形の 2 階微分方程式を得る。

波動の速度については、次のようにも考えられる。

$$(2.10) \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2}$$

ここで、波は一定の速度 v で進むと仮定する。

時刻 $t = 0$ で $u(x)$ だった波動は、変形せずに進むので、時刻 $t = t$ には $u(x - vt)$ になる。

$$(2.11) \quad \frac{\partial^2 u(x - vt)}{\partial t^2} = v^2 u''(x - vt)$$

$$(2.12) \quad \frac{\partial^2 u(x - vt)}{\partial x^2} = u''(x - vt)$$

従って

$$(2.13) \quad \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

この式から $\sqrt{T/\rho}$ が波動の速度を表すことが解る。この式を古典的な一次元の波動方程式といい、 $u(x, t)$ を古典的波動関数という。

波動に周期性がある場合を考える。波長 λ 、波数 k 、周期 T 、角周波数 ω 、振動数 ν あるとすれば、

$$(2.14) \quad u(x, t) = u(kx - \omega t)$$

$$(2.15) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$(2.16) \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

古典的波動方程式は次のようにかける

$$(2.17) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

$$(2.18) \quad v = \frac{\omega}{k}$$

2.3 時間部分

$$(2.24) \quad \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \alpha v^2 T(t)$$

$\alpha = 0$ の時には $T(t) = 0$ となるので意味がない。

$\alpha > 0$ ならば $\alpha v^2 = \beta^2$ と置いて

$$(2.25) \quad T(t) = a_1 e^{\beta t} + a_2 e^{-\beta t}$$

これは、振動的な波動ではなく、単調な増加または減衰を表す。 $t = -\infty$ または $t = \infty$ で発散し、通常の波動を表すには適当でない。

$\alpha < 0$ ならば $\alpha v^2 = -\omega^2$ と置いて

$$(2.26) \quad T(t) = b_1 \sin \omega t + b_2 \cos \omega t \\ = P_i \sin(\omega t + \varphi_{0i})$$

となり、角周波数 ω の周期的な波動を表す。定常波に対してはこのようにならなければならない。

すると、古典的な波動関数は次のようにも書けることになる。

$$(2.27) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x) = -\frac{\omega^2}{v^2} u(x) = -k^2 u(x)$$

2.4 定常波

時間的に変化しない波動を定常波という。ここでは両端が固定されている振動(たとえば弦楽器の絃)を考える。

境界条件は両端 $x = 0$ と $x = L$ で振動なし、つまり $u(0,t) = u(L,t) = 0$ である。

変数分離型で書くと $X(0)T(t) = X(L)T(t) = 0$ だから、 $X(x)$ のみに関して $X(0) = X(L) = 0$ である。

ところで、

$$(2.28) \quad \alpha = -\frac{\omega^2}{v^2} = -k^2$$

だから

$$(2.29) \quad \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k^2 X(x) = 0$$

この微分方程式の一般解は

$$(2.30) \quad X(x) = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx \\ = P_r \sin(k_1 x + \varphi_{0r})$$

境界条件から直ちに $c_2 = 0$ である。 c_1 に関しては、境界条件のみからでは決まらないが、

少なくとも $c_1 \neq 0$ でなければならない。なぜなら、 $c_1 = 0$ は振動のない状態のみを表すからである。従って、境界条件を満たすためには

$$(2.31) \quad kL = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

でなければならない。 $n = 0$ は振動していない状態を表す。 c_1 は振動の最大振幅で決まる。

さて、

管の場合の境界条件については。

境界条件を、 $x = L$ において

管の端が閉じているとき $\xi = 0$

管の端が開いているとき $\frac{\delta \xi}{\delta x} = 0$

とすれば、

(1) 管の両端が開いている場合：

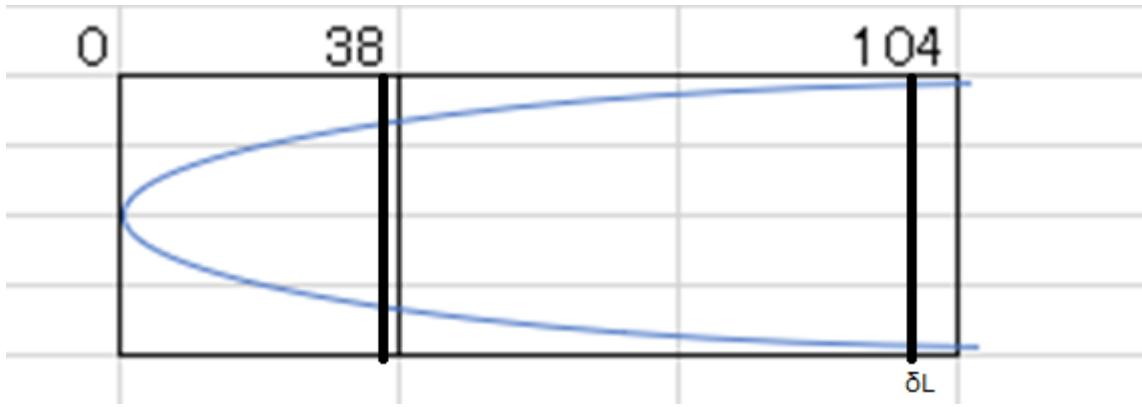
$$\xi(x, t) = C \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{k\pi}{L}\sqrt{\frac{K}{\rho}}t + \alpha\right)$$

(2) 管の一端は閉じ一端は開いている場合：

$$\xi(x, t) = C \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2L}x\right) \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{L}\sqrt{\frac{K}{\rho}}t + \alpha\right)$$

となる。

管の長さを L としたが、管の形が円形で波長に対して半径が小さい場合には、その半径の約 0.65 倍だけ管の長さに加えたものを L としなければならない。これは $\frac{\delta \xi}{\delta x} = 0$ となる位置が、それだけ管の外にずれるためで、これを開口端補正という。



$\lambda/4 = 104\text{m}$ の音を考える。

(3) 管の一端は閉じ一端は開いている場合：

$$\xi(x, t) = C \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2L} x\right) \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{L} \sqrt{\frac{K}{\rho}} t + \alpha\right)$$

となる。Lは補正後の値で、104mとする。

開口端で空気の分子が δL だけ、押し詰められた場合を考える。

$\Delta P/P$ が実効値で $20\text{mPa}/10^5\text{Pa}=2*10^{-7}$ 程度とすれば、

$$PV=nRT$$

押されたときには、風車のタワーの断面積を S とすると、

$$(P + \Delta P)(104 - \delta L) * S = n R T$$

$$(P)(104) * S = n R T$$

これから、

$$(P + \Delta P)(104 - \delta L) = (P)(104)$$

$$- P * \delta L + 104 * \Delta P - \Delta P * \delta L = 0$$

$$- \delta L + 104 * \Delta P / P - \Delta P / P * \delta L = 0$$

$$\delta L = (104 * (\Delta P / P)) / (1 + \Delta P / P) = 104 * (2 * 10^{-7}) / (1 + 2 * 10^{-7}) = 0.00002\text{m} = 0.02\text{mm}$$

$$C \sin\left(\frac{(2 * 1 - 1)\pi}{2 * 104} 104\right) = 0.00002\text{m} = 0.02\text{mm} = C$$

$$0.00002 \sin\left(\frac{(2 * 1 - 1)\pi}{2 * 104} 38\right) = 0.00001\text{m} = 0.01\text{mm}$$

となるので、風車の底の部分が、0.01mm程度の振幅で揺れれば、仮の不動壁から開口端までが 104mあると考えられる。

これは、振動レベル計で計測すれば正しいか否かが分かる。

風車にかかる力をフーリエ級数で表現すれば、超低周波音（0 Hz ~ 20 Hz）の最も大きな原因是、風の力による外力に対応する気柱共鳴であると言える。もちろん、風車にかかる力についての考察が更に必要である。

7.8 音速と粒子速度

“音と音波” 小橋豊著、裳華房を参考にすれば、

7.8.1 音の伝搬

流体が静止しているならば、内部の状態は圧力だけで決まる。内部に運動がおこると、部分的な相対運動を考えなくてはならない。流れる部分と静止している部分の間には摩擦力が働き、ずれの応力を及ぼす（粘性）。この結果、運動は妨げられてそのエネルギーは熱エネルギーとなって拡散する。

ここでは、粘性を無視できる完全流体（内部に生じる応力は常に圧力のみで、しかもその面の方向に関係しない。）の場合を考える。したがって、その中に生じる応力の変動は圧力の変化のみであり、それによる体積変化と共に音波として伝わる。

流体内の1点 (x, y, z) における密度を ρ_s 、流体の圧力を P_s とする。音波が到着したとき、その密度が ρ 、圧力が P になったとする。Pに対して、音波が無いときの圧力、 P_s を静圧という。その点の音圧の変化分

$$p(t, x, y, z) = P - P_s \quad (1)$$

をその点の音圧という。日常の音では、この値は極めて小さい。

点 (x, y, z) に、微小な体積 $\delta V = \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$ を持った直方体を考える。この小さな直方体の周りでの $d=(\xi(x, y, z), \eta(x, y, z), \zeta(x, y, z))$ という変位を受けるとともに、体積が $\delta V'$ になったとする。

もとの直方体の2つの頂点 $(x, y, z) :: (x + \delta x, y, z)$ に関しては、変位後には、

$(x, y, z) + (\xi(x, y, z), \eta(x, y, z), \zeta(x, y, z)) :: (x + \delta x, y, z) + (\xi(x + \delta x, y, z), \eta(x + \delta x, y, z), \zeta(x + \delta x, y, z))$
となるが、

x座標の差については、

$$x + \delta x + \xi(x + \delta x, y, z) - (x + \xi(x, y, z)) = \delta x + (\partial \xi / \partial x) \delta x$$

となる。他の辺についても同様に考えて、さらに、直方体のままだと考えれば、

$$\begin{aligned} \delta V' &= (1 + (\partial \xi / \partial x)) \delta x \cdot (1 + (\partial \eta / \partial y)) \delta y \cdot (1 + (\partial \zeta / \partial z)) \delta z \\ &= \delta x \delta y \delta z (1 + (\partial \xi / \partial x)) + (\partial \eta / \partial y) + (\partial \zeta / \partial z) \end{aligned}$$

となる。

したがって、体積変化の割合は、

$$\Delta = \frac{\delta V' - \delta V}{\delta V} = (\partial \xi / \partial x) + (\partial \eta / \partial y) + (\partial \zeta / \partial z) = \operatorname{div} d \quad (3)$$

となります。

質量が保存されるので、 $\rho_s \delta V = \rho \delta V'$ となり、 $\Delta + 1 = \frac{\delta V' - \delta V}{\delta V} = \frac{\delta V'}{\delta V}$ に注意して、

$$\rho_s = \rho(1 + \Delta) \quad (4)$$

また、密度変化の割合 s は、

$$s = \frac{\rho - \rho_s}{\rho_s}$$

よ

$$1 + s = \frac{\rho}{\rho_s}$$

となるので、

$$\rho = \rho_s(1 + s)$$

$$\rho_s = \frac{\rho}{1 + s}$$

s が小さければ、 $\frac{1}{1+s} = 1-s$ となるので、 $\Delta = -s$ を得る。

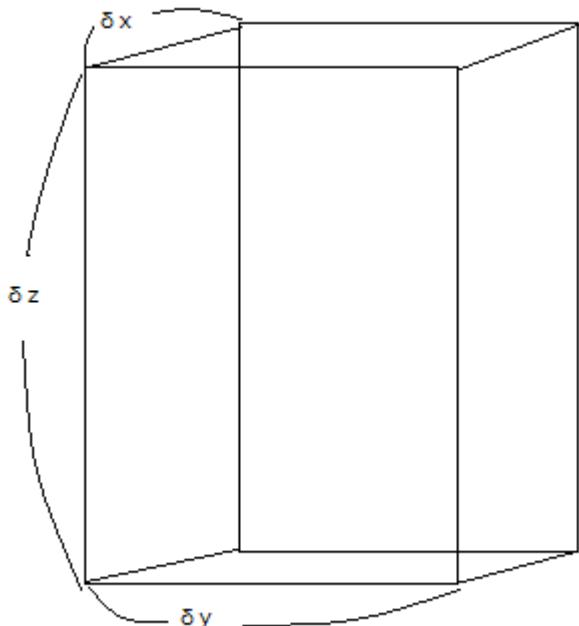
デルタは膨張度、 s は圧縮度と呼ばれる。

音の音圧を p とすれば、体積が膨張するときには、単位体積内における空気の分子の数も減るので圧力が減る。よって、

$$p = -K \Delta = K s \quad (7)$$

と書ける。Kを弾性定数とよぶ。

この部分の運動に関する力は圧力の場所による差であるから、その運動方程式は、



上の図の微小部分にかかる x 軸方向の圧力を考える。

$p(x + \delta x) - p(x)$ が正ならば、 x 軸の負の向きに力が働き、 x 軸方向の加速度は負となる。

$p(x + \delta x) - p(x)$ が負ならば、 x 軸の正の向きに力が働き、 x 軸方向の加速度は正となる。

この微小部分の速度ベクトルを $u = (u_x, u_y, u_z)$ とすれば、

$$\rho \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z \cdot \frac{\partial u_x}{\partial t} = -(p(x + \delta x) - p(x)) \cdot \delta y \cdot \delta z$$

となるので、

$$\rho \cdot \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

を得る。同様にして

$$\rho \cdot \frac{\partial u_y}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\rho \cdot \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

となる。

これらを纏めて表せば

$$\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{grad} p$$

と書ける。

$u = (u_x, u_y, u_z)$ は音波によって、流体の微小部分が振動する速度なので、粒子速度と呼ばれる。

(7) 式を t で微分して。

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t} &= -K \frac{\partial \Delta}{\partial t} = -K \frac{\partial}{\partial t} ((\partial \xi / \partial x) + (\partial \eta / \partial y) + (\partial \zeta / \partial z)) \\ &= -K ((\partial u_x / \partial x) + (\partial u_y / \partial y) + (\partial u_z / \partial z)) \\ &= -K \operatorname{div} u\end{aligned}$$

となり、再度 t で微分すれば、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= -K \left(\frac{\partial}{\partial x} (\partial u_x / \partial t) + \frac{\partial}{\partial y} (\partial u_y / \partial t) + \frac{\partial}{\partial z} (\partial u_z / \partial t) \right) \\ &= \left(\frac{K}{\rho} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} (\partial p / \partial x) + \frac{\partial}{\partial y} (\partial p / \partial y) + \frac{\partial}{\partial z} (\partial p / \partial z) \right) \\ &= \left(\frac{K}{\rho} \right) \nabla^2 p\end{aligned}$$

となり、波動方程式を得る。

この式は、 p が

$$c = \sqrt{\left(\frac{K}{\rho} \right)}$$

の速度で媒質の中を伝わって行くことを示している。

7.8.2 平面音波

平面音波が伝わる方向に x 軸をとる。この時、粒子変位 ξ 、粒子速度 u 、膨張度 Δ 、圧縮度 s は t と x の関数になる。

$$\Delta = -s = (\partial \xi / \partial x)$$

$$p = -K \Delta = K s = -K(\partial \xi / \partial x)$$

$$u = (\partial \xi / \partial t)$$

となる。

運動方程式は

$$\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

となり、これから

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

この式を t や x で微分して

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

を得る。

平面音波では、粒子の変位、粒子速度、音圧などが同じ形の波動方程式で表される。

この微分方程式の解は。

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \text{ とおけば、} p(t, x) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

が解となる。

ここで、 $p(t, x) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ について考える。

$x=0$ で観測される音圧の変化は、 $p(t, 0) = f(t)$ であり、これと同じ音圧の変化が、 x と言う地点で観測されるのは、

$$p(t', x) = f\left(t' - \frac{x}{c}\right) = f(t)$$

$$t' = t + \frac{x}{c}$$

$x=0$ における、時刻 t での音圧（現象）が、場所 x においては、時刻、 $t' = t + \frac{x}{c}$ での音圧（現象）となつている。

これは、音圧の変化が、 $x=0$ から x まで、 x/c 時間かかって伝わったことになる。

これは、音圧、粒子速度、粒子変位、圧縮度、膨張度などが全て、速度

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

で伝わる事を意味する。これが、音の(伝搬)速度です。

あるいは、

$$f_1(x - v(t+1)) = f_1((x - v) - vt)$$

と書けるので、時刻($t+1$)での位置 x での波の形は、時刻 t の時の位置 $(x-v)$ での波の形と一致することが分かる。

これは、波の形が1秒間に v の速さで x 軸の正の方向に（右側に）移動することを意味する。

$$f_2(x + v(t+1)) = f_2((x + v) + vt)$$

と書けるので、時刻($t+1$)時の位置 x での波の形は、時刻 t の時の位置 $(x+v)$ での波の形と一致することが分かる。

これは、波の形が1秒間に v の速さで x 軸の負の方向に（左側に）移動することを意味する。

さらに、平面波の場合には、 x 方向に進む音波の粒子の変位を

$$\xi = \xi \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

とすれば、粒子速度は、

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{d\xi}{d(t - \frac{x}{c})}$$

また、音圧は

$$p = -K \Delta = K s = -K(\partial \xi / \partial x) = -K \frac{d\xi}{d(t - \frac{x}{c})} \frac{d(t - \frac{x}{c})}{dx} = \frac{K}{c} \frac{d\xi}{d(t - \frac{x}{c})}$$

ゆえに、

$$\frac{p}{u} = \frac{K}{c} = \rho c \quad (15)$$

となり、

平面音波では、任意の場所で観測した音圧と粒子速度は常に比例し、同位相であることを示している。

空気中では、20°C、1気圧の時には、

$$\rho c = 415 \text{ Ns/m}^3$$

1000Hzの正弦波で、人間が感じ得る最小の実効音圧 P_e は、 $3 * 10^{-5} \text{ N/m}^2$

よって、この時の粒子速度 u の実効値は

$$U_e = \frac{P_e}{\rho c} = \frac{3}{415} 10^{-5} \text{ m/s} = 7 * 10^{-8} \text{ m/s}$$

変位を、 $\xi \sin(\omega t)$ とすれば、 $u = \xi \omega \cos(\omega t)$, $\omega = 2\pi\nu = 2\pi * 1000$

$$\xi \omega = \sqrt{2} U_e$$

$$\xi = \frac{\sqrt{2} U_e}{2\pi * 1000} = 1.6 * 10^{-11} \text{ m} = 1.6 * 10^{-5} \mu\text{m} = 0.16 \text{ \AA}$$

となり、この ξ の値は水素原子の直径よりも小さい。

他に、音の強さ J は

$$J = 2.0 * 10^{-12} W/m^2$$

空気の断熱体積弾性率 K は、 γP であるから

$$K = 1.4 * 10^5 N/m^2$$

圧縮度と膨張度は

$$|\Delta| = s = \frac{p}{K} = 2 * 10^{-10}$$

となる。

7.9 音のエネルギー

音場内の点 (x, y, z) にある微小部分を考える。体積を $\delta V = \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$ 、密度を ρ 、粒子速度を u とすれば、その部分の運動エネルギーは、

$$\frac{1}{2} \rho \delta V u^2$$

である。

微小な体積変化 dV が起こる間に、圧力 p が為す仕事は、 $dW = pdV = (p \cdot (\delta y \cdot \delta z))\delta x$
体積弾性率を K とすれば、

$$\Delta = \frac{V' - V}{V} = \frac{dV}{V}$$

$$dp = -K\Delta$$

$$dV = -\frac{V dp}{K}$$

となるので、音圧が $0 = P_s - P_s$ から $\delta p = P - P_s$ に変化する間に圧力 p のなした仕事 W は

$$W = \int dW = \int p \left(-\frac{V dp}{K} \right) = -\frac{V}{K} \int_0^{\delta p} p dp = -\frac{V}{2K} (\delta p)^2$$

となる。(現在の音圧を p とするので $\delta p \rightarrow p$ 、考えている対象の体積を考慮して $V \rightarrow \delta V$ 、と置き換える。)

その点の音圧を p とすれば、その部分の変形のエネルギーは

$$\frac{1}{2} \frac{p^2}{K} \delta V = \frac{1}{2} \frac{p^2}{\rho c^2} \delta V$$

よって、 δV の部分が持つ振動エネルギーは

$$\frac{1}{2} \rho \delta V u^2 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{\rho c^2} \delta V = \frac{1}{2} \rho (u^2 + \frac{p^2}{\rho^2 c^2}) \delta V$$

であり、単位体積当たりの振動エネルギーは、

$$w(t, x, y, z) = \frac{1}{2} \rho (u^2 + \frac{p^2}{\rho^2 c^2})$$

となり、この時間平均をとると、

$$W_{av}(t, x, y, z) = \frac{1}{T} \int_0^T w(t, x, y, z) dt = \frac{1}{2} \rho ((U_e)^2 + \frac{P_e^2}{\rho^2 c^2}) \quad (\text{粒子速度と音圧の実効値を使っています。})$$

となります。

x軸方向に伝わって行く平面音波では、(15)式

$$\frac{p}{u} = \frac{K}{c} = \rho c$$

により、波形に関係なく、

$$w_p(t, x) = \frac{1}{2} \rho (u^2 + \frac{p^2}{\rho^2 c^2}) = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{p^2}{\rho^2 c^2} + \frac{p^2}{\rho^2 c^2} \right) = \frac{p^2}{\rho c^2} = \rho u^2$$

となり、時間に関しての平均をとれば、

$$W_{p,av} = \frac{1}{T} \int_0^T w_p(t,x) dt = \frac{1}{\rho c^2 T} \int_0^T p^2 dt = \frac{P_e^2}{\rho c^2} = \rho U_e^2$$

となる。

次に、 $w_p(t,x)$ を x について平均を取ると、波長を λ として、 $p = f(t - \frac{x}{c})$ 、 $T = \lambda/c$

$$W_{p,xav} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda w_p(t,x) dx = \frac{1}{\rho c^2 \lambda} \int_0^\lambda \{f(t - \frac{x}{c})\}^2 dx$$

ここで、 $F'(z) = \{f(z)\}^2$ 、 $z = t - \frac{x}{c}$ とおくと、 $dx = -cdz$ 、 $x = 0 \Leftrightarrow z = t$ 、 $x = \lambda \Leftrightarrow z = t - \lambda/c$ 、

$$\int_0^\lambda \{f(t - \frac{x}{c})\}^2 dx = -c \int_t^{t - \frac{\lambda}{c}} \{f(z)\}^2 dz = -c \{F\left(t - \frac{\lambda}{c}\right) - F(t - 0/c)\}$$

$$= c \{F\left(t + \frac{x}{c} - \frac{\lambda}{c}\right) - F(t - \frac{\lambda}{c} + \frac{x}{c} - \frac{\lambda}{c})\}$$

$$= c \int_{t - \frac{\lambda}{c} + \frac{x}{c}}^{t + \frac{x}{c}} \{f(t - \frac{x}{c})\}^2 dt = c \int_0^{\frac{\lambda}{c}} \{f(t - \frac{x}{c})\}^2 dt = c \int_0^T \{p\}^2 dt = c T P_e^2$$

よって、

$$W_{p,xav} = \frac{1}{\rho c^2} \frac{c T P_e^2}{\lambda} = \frac{P_e^2}{\rho c^2} = W_{p,av}$$

が成立する。

7.10 気柱共鳴と笛

7.10.1 篦笛とリコーダー

篠笛は音を出すのが難しいようです。

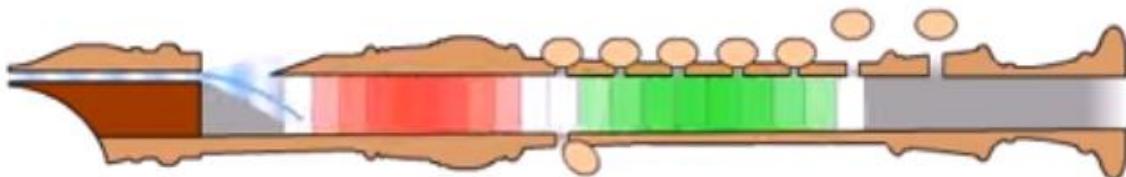


篠笛初心者に多い悩みのひとつが「音が出ない～汗」という声です。

例えば、「甲音（高い音）がきれいに出ない」「呂音（低い音）がかすれる」「息が続かない」など篠笛の初心者の人がぶつかる最初の壁って、ほとんどの人が同じなんです。

では、

リコーダーで音が出ないと悩む人はいるのでしょうか？そんな人はいません。誰が吹いても、音は出ます。



その理由は、誰が吹いても、エッジに当たる気流の角度は一定だからです。

音は出るのですが、音の高さは指で調整します。音の高さは息の強さでは決まりません。音の高さは指を詰した穴の位置で決まります。

空中に音を拡散させるには、強い力で空気を押したり、強い力で空気を引き込んだりしなくてはなりません。管内での音圧の変動に注目する必要があります。圧力の変動が激しくて、管内の気柱の振動を外部に拡散できる場所を歌口と言う事にします。

本来、歌口とは、和歌の詠みぶり、あるいは和歌を上手に詠むことの意であるが、日本の笛に対しても古くから使われており、文献上は 17 世紀の天理本狂言『吹取(ふきとり)』、『日葡(にっぽ)辞書』(1603)、淨瑠璃(じょうるり)『牛若千人斬(ぎり)・二』(1679) などに記述がみられる。今日では一般にマウスピース mouthpiece (フランス語で embouchure、ドイツ語で Mundstück) の訳語として使われているが、口の使い方によって分類すると次のように説明される。

(1)唇全体をあてる場合。トランペットのようなリップリード楽器や笙(しょう)のようなフリーリード楽器では、

いわゆるマウスピースが歌口となり、それを吹管(すいかん)、口管ともいう。

(2)下唇のみをあてる場合。横笛や縦笛では、下唇のあたる部分とエッジの設けられている部分を歌口とし、吹口(ふきぐち)ともよぶ。フルート、尺八などがその代表例。

(3)くわえる場合。リード楽器のうち、クラリネットではリードとベックをあわせた部分、簞篥(ひちりき)やファゴットではリード自体。リコーダーのようなホイッスルフルートでは、くわえた吹口の部分を歌口とするほかに、エッジの設けられた小窓を歌口とする解釈もある。

笛には沢山穴があるのですが、笛の中の気柱の振動が空気中に伝わり、音として拡散する場所を歌口とよぶことにします。

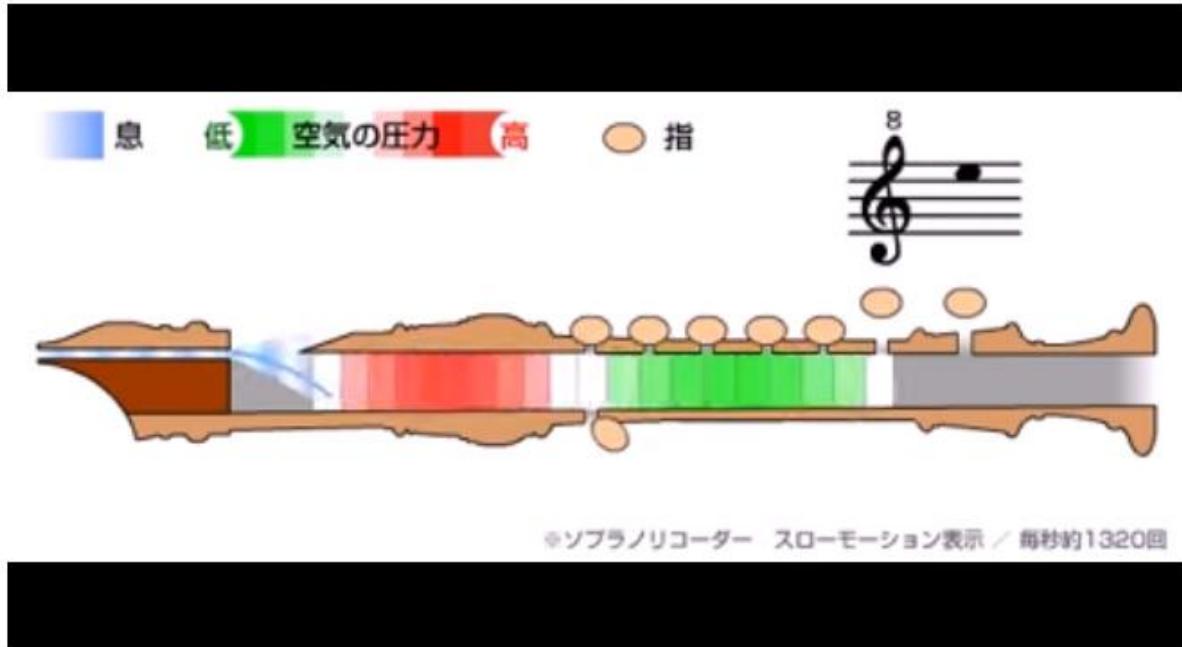
リコーダーでは、エッジの手前で空気が振動しています。



映像提供 九州大学
吉川 茂さん



解体全書から、リコーダーの仕組み動画を引用させて頂きます。



息の流れを見て頂くとわかりますが、吹き口から入り込んだ息が、窓（ラピューム）で小刻みに震える事で、カルマン渦という渦を発生します。この渦により、共鳴が起こり、音が発生する仕組みです。

リコーダーでカルマン渦が発生して音の原因になるとしても、吹き方を工夫して、特定の周波数の音が出るよう、カルマン渦を発生させることは出来ません。どの周波数の音が出ているときでも、カルマン渦は同じです。

違うのは開いている穴の位置です。

根本的な原因がカルマン渦だとしても、開いている穴の位置で周波数が決まります。ある特定の周波数の音が大きく聞こえて、他の音は小さく聞こえる理由を説明する必要があるのです。

音の反射は固定端でも開口端でも起こります。笛の中は丸くて細いので、音が発生すると、ある程度の反射が繰り返されます。

リコーダーの長さを 50 cm とすれば、音は 340m/s で進むのですから、リコーダーの管内の往復距離は 1m なので、1 秒あれば、340 往復出来ます。0.1 秒でも 34 往復します。

カルマン渦が原因で、様々な周波数の音が発生した時に、管の長さと釣り合っている周波数の音は大きくなり、釣り合っていない周波数の音が小さくなることは、コンピュータを使って計算すれば分かります。計算は後ほど示します。

リコーダーに関しては、エッジの手前の穴（歌口）の所に薄い板を置くと、それが外側に押されたり、内側に引き込まれたりする様子が分かります。一定の振動数で、歌口の空気が振動しています。

この時の振動数は、穴によって調節された笛の実質的な長さと釣り合っている周波数の音なのです。

風車の塔の中の気柱も、ナセルの上部の隙間から出たり入ったりします。

ブレードが真上に来て、ブレードに掛る揚力によって、ナセルは、210 度の方向に押されます。塔の中央部もその方向に動きます。動くときの周期は、ブレードが真上に来る回数によって決まります。

この時、塔の部分が曲がります。円柱状の塔が曲がれば、断面の形は円から橢円に変化します。周の長さが一定の図

形で、面積が最大のものは円です。したがって、塔が曲がれば、容積が減少します。容積が減少すれば空気が外へ飛び出します。塔が元の形になれば、容積がもとに戻るので、吐き出した空気を吸い込みます。

笛の歌口での空気の振動と同じ現象が起きます。笛から音が出るのと同じで、ナセルの隙間から音が出ます。

もちろん、共鳴とは言えなくて、強制的な音圧変化の結果として音を出している歌口があると考えなくてはなりません。

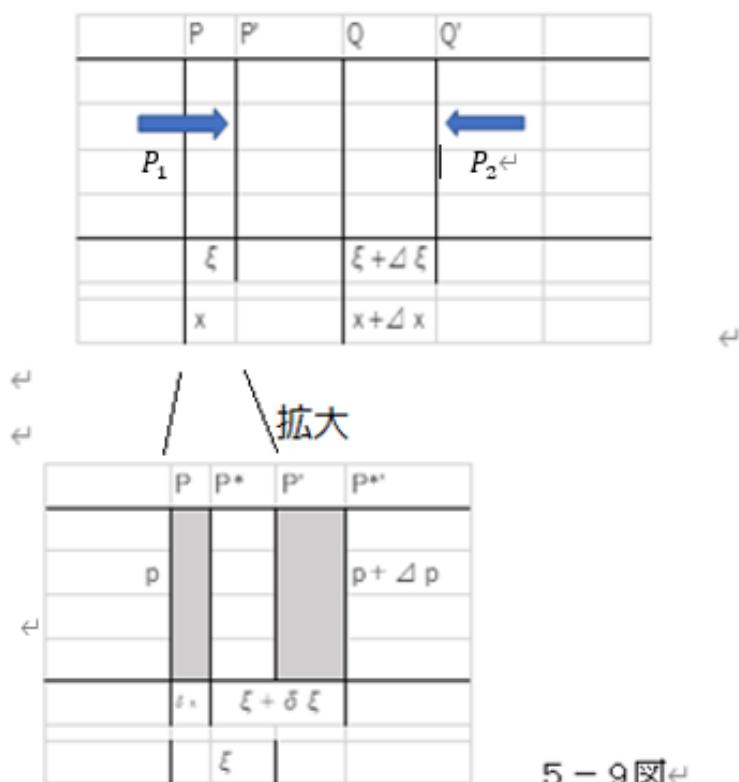
7.10.2 管の中の気体の振動

管の中の気体の振動

細長い管の中の気体は1種の棒と考えても良い。これを気柱と呼ぶこともある。管の口を吹いたり、音叉などの振動している物体を近づけたりすると、管の中の気体に振動が起こる。ただし、気体にはそれの弾性がないから、横振動やねじれ振動はおこらず、縦振動だけが起こる。また、気体は圧縮率が極めて大きいので、振動に伴って各部分の密度も顕著に変化する。したがって気体の振動は固体の振動のように物質の周期的変位として受け取っても良いが、むしろ密度または圧力の振動として理解したほうが都合の良い場合もある。

気体の振動は厳密には流体力学の方程式から出発して議論しなくてはならないが、荒い近似としては棒の縦振動と同様に取り扱うことができる。簡単のために太さ一様なまっすぐな管を考えよう。その中に、密度 ρ 圧力 p の気体が満たされているとする。

管の軸に沿って x 軸をとり、5-9図 (a) のように x 、 $x + \Delta x$ の位置に x 軸と垂直な断面、P, Qを考える。振動が起ころうとしてP面は ξ だけ変位して P' へ、Q面は $\xi + \Delta \xi$ だけ変位して Q' へ移動した状態で、 P' 面と Q' 面に挟まれた部分の運動方程式を作ると、



管の断面積をA、 P' 面での圧力を P_1 、 Q' 面での圧力を P_2 とすれば、

$$\rho A \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = (P_1 - P_2) A \quad (1)$$

と書ける。ただし、気体の粘性や渦が発生することなどはすべて無視している。

P_1 、 P_2 は、次のように考えて求める。すなわち、P面から δx だけ離れた P^* 面を考え、P面と P^* 面に挟ま

れた部分に着目する。5-9図（右側）。 δx は極めて小さく取っておく。P面が ξ だけ変位した時 P^* 面は $\xi + \delta \xi$ だけ変位したとすると、 PP^* の部分の体積

$$\delta v = A\{(\delta x + \xi + \delta \xi) - (\delta x + \xi)\} = A\delta \xi$$

だけ変化する。気体の体積弾性率をKとすると、この体積の変化の結果、 PP^* の部分の圧力は

$$\angle p = -K \frac{\delta v}{v} = -K \frac{\delta \xi}{\delta x}$$

だけ変化する。 δx を限りなく小さくした極限では

$$\angle p = -K \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

これは、気体内の任意の点での変位と圧力の関係を与える式である。従って

$$p_1 = p - K \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x$$

$$p_2 = p - K \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \angle x$$

ところで、 $(\partial \xi / \partial x)_x$ と書いたのは、位置 x における $(\partial \xi / \partial x)$ の値と言う意味である。これから、

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= K \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \angle x - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x \right\} \\ &= K \left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)_x (\Delta x) - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x'} \right\} \\ &= K \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)_x (\Delta x) \end{aligned}$$

これを、（1）の右辺に代入し、添え字の x は一般的な場所と解釈できるので、それを省いて

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{K}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \quad (3)$$

を得る。摂動に伴う各部分の膨張、圧縮は速やかに行われる所以、断熱変化が起きると考えてよい。

そうすると、

$$K = \gamma p, \quad \gamma = c_p/c_v$$

と書けるので、（3）は

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \gamma \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)$$

となる。

これは、2回偏微分方程式であり、次の式

$$f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

はこの解であり、また、解は必ずこの形にかける。

$$f_1(x - v(t+1)) = f_1((x - v) - vt)$$

と書けるので、時刻 $(t+1)$ 時の位置 x での波の形は、時刻 t の時の位置 $(x-v)$ での波の形と一致することが分かる。

これは、波の形が1秒間に v の速さで x 軸の正の方向に（右側に）移動することを意味する。

また、

$$f_2(x + v(t+1)) = f_2((x+v) + vt)$$

と書けるので、時刻($t+1$)時の位置 x での波の形は、時刻 t の時の位置 $(x+v)$ での波の形と一致することが分かる。

これは、波の形が1秒間に v の速さで x 軸の負の方向に（左側に）移動することを意味する。

解を具体的に求めるには、変数が分離できて、

$$\xi(t, x) = X(x)T(t)$$

と仮定して代入すれば、

$$X(x) \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = v^2 T(t) \left(\frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right)$$

両辺を $v^2 A(x)B(t)$ で割れば

$$\frac{1}{v^2 T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \frac{1}{X(x)} \left(\frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right)$$

となって、左辺は t の関数、右辺は x の関数。これらが等しくなるのは両辺が定数の場合だけなので、この共通の値を α とおけば、

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \alpha v^2 T(t)$$

$$\left(\frac{d^2 X(x)}{dx^2} \right) = \alpha X(x)$$

となって、線形の2階微分方程式を得る。

波動の速度については、次のようにも考えられる。

$$(2.10) \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2}$$

ここで、波は一定の速度 v で進むと仮定する。

時刻 $t=0$ で $u(x)$ だった波動は、変形せずに進むので、時刻 $t=t$ には $u(x-vt)$ になる。

$$(2.11) \quad \frac{\partial^2 u(x-vt)}{\partial t^2} = v^2 u''(x-vt)$$

$$(2.12) \quad \frac{\partial^2 u(x-vt)}{\partial x^2} = u''(x-vt)$$

従って

$$(2.13) \quad \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

この式から $\sqrt{T/\rho}$ が波動の速度を表すことが解る。この式を古典的な一次元の波動方程式といい、 $u(x,t)$ を古典的波動関数という。

波動に周期性がある場合を考える。波長 λ 、波数 k 、周期 T 、角周波数 ω 、振動数 v であるとすれば、

$$(2.14) \quad u(x,t) = u(kx - \omega t)$$

$$(2.15) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$(2.16) \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

古典的波動方程式は次のようにかける

$$(2.17) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

$$(2.18) \quad v = \frac{\omega}{k}$$

2.3 時間部分

$$(2.24) \quad \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \alpha v^2 T(t)$$

$\alpha = 0$ の時には $T(t) = 0$ となるので意味がない。

$\alpha > 0$ ならば $\alpha v^2 = \beta^2$ と置いて

$$(2.25) \quad T(t) = a_1 e^{\beta t} + a_2 e^{-\beta t}$$

これは、振動的な波動ではなく、単調な増加または減衰を表す。 $t = -\infty$ または $t = \infty$ で発散し、通常の波動を表すには適当でない。

$\alpha < 0$ ならば $\alpha v^2 = -\omega^2$ と置いて

$$(2.26) \quad T(t) = b_1 \sin \omega t + b_2 \cos \omega t \\ = P_i \sin(\omega t + \varphi_{0i})$$

となり、角周波数 ω の周期的な波動を表す。定常波に対してはこのようになっていなければならない。

すると、古典的な波動関数は次のようにも書けることになる。

$$(2.27) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x) = -\frac{\omega^2}{v^2} u(x) = -k^2 u(x)$$

2.4 定常波

時間的に変化しない波動を定常波という。ここでは両端が固定されている振動(たとえば弦楽器の絃)を考える。

境界条件は両端 $x = 0$ と $x = L$ で振動なし、つまり $u(0, t) = u(L, t) = 0$ である。

変数分離型で書くと $X(0)T(t) = X(L)T(t) = 0$ だから、 $X(x)$ のみに関して $X(0) = X(L) = 0$ である。

ところで、

$$(2.28) \quad \alpha = -\frac{\omega^2}{v^2} = -k^2$$

だから

$$(2.29) \quad \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k^2 X(x) = 0$$

この微分方程式の一般解は

$$(2.30) \quad X(x) = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx \\ = P_r \sin(k_1 x + \varphi_{0r})$$

境界条件から直ちに $c_2 = 0$ である。 c_1 に関しては、境界条件のみからでは決まらないが、

少なくとも $c_1 \neq 0$ でなければならない。なぜなら、 $c_1 = 0$ は振動のない状態のみを表すからである。従って、境界条件を満たすためには

$$(2.31) \quad kL = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

でなければならない。n=0 は振動していない状態を表す。c1 は振動の最大振幅で決まる。

管の場合の境界条件については。

境界条件を、x = lにおいて

管の端が閉じているとき $\xi = 0$

管の端が開いているとき $\frac{\delta\xi}{\delta x} = 0$

とすれば、

(4) 管の両端が開いている場合：

$$\xi(x, t) = C \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{k\pi}{L}\sqrt{\frac{K}{\rho}}t + \alpha\right)$$

(5) 管の一端は閉じ一端は開いている場合：

$$\xi(x, t) = C \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2L}x\right) \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{L}\sqrt{\frac{K}{\rho}}t + \alpha\right)$$

となる。

管の長さを L としたが、管の形が円形で波長に対して半径が小さい場合には、その半径の約 0.65 倍だけ管の長さに加えたものを L としなければならない。これは $\frac{\delta\xi}{\delta x} = 0$ となる位置が、それだけ管の外にずれるためで、これを開口端補正という。

7.10.3 音圧分布と粒子速度

平面波を考えて、x 軸方向だけの変位があるとする。

運動に関与する力は、圧力の場所による差であるから、粒子の速度ベクトルを、

$u(u_x, u_y, u_z)$ とすると、これを微分したものが加速度であり、微小部分の質量と加速度の積は、圧力差に等しいので、微

小部分の面積を考えて

$$\rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\{p(x + \Delta x) - p(x)\} \Delta y \Delta z$$

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\{p(x + \Delta x) - p(x)\} / \Delta x = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$u_x = -\frac{1}{\rho} \int \frac{\partial p}{\partial x} dt$$

を得る。

管の中心軸に沿って座標 x をとると、管の中の音圧と粒子速度は、入射波が管の開いた部分から、
音圧 $p_i = P_i \sin(t\omega - k_1 x + \varphi_{0i})$ として入ってきて、管の底で反射して $p_r = P_r \sin(t\omega + k_1 x + \varphi_{0r})$ として戻ってくる。
とすれば、

$$\frac{\partial p_i}{\partial x} = -P_i k_1 \cos(t\omega - k_1 x + \varphi_{0i})$$

$$-\frac{1}{\rho} \int \frac{\partial p_i}{\partial x} dt = P_i k_1 \frac{1}{\rho\omega} \sin(t\omega - k_1 x + \varphi_{0i})$$

ここで、 $\frac{\omega}{k_1} = c_1$ とおけば、入射波における粒子速度は、 $u_i(t, x) = \frac{p_i(t, x)}{\rho_1 c_1}$ であり、

反射波 $p_r = P_r \sin(t\omega + k_1 x + \varphi_{0r})$ に対しては、

$$\frac{\partial p_r}{\partial x} = P_r k_1 \cos(t\omega + k_1 x + \varphi_{0r})$$

$$-\frac{1}{\rho} \int \frac{\partial p_r}{\partial x} dt = -P_r k_1 \frac{1}{\rho\omega} \sin(t\omega + k_1 x + \varphi_{0r})$$

粒子速度は $u_r(t, x) = \frac{-p_r(t, x)}{\rho_1 c_1}$

となり、重ね合わせて、 $u_I(t, x) = u_i(t, x) + u_r(t, x) = U_I(x) \sin(t\omega + \psi_I(x))$

ここで、

$$\rho_1 c_1 (u_i + u_r) = P_i \sin(t\omega - k_1 x + \varphi_{0i}) - P_r \sin(t\omega + k_1 x + \varphi_{0r})$$

$$= P_i (\sin(t\omega) \cos(-k_1 x + \varphi_{0i}) + \cos(t\omega) \sin(-k_1 x + \varphi_{0i}))$$

$$- P_r (\sin(t\omega) \cos(k_1 x + \varphi_{0r}) + \cos(t\omega) \sin(k_1 x + \varphi_{0r}))$$

$$= (P_i \cos(-k_1 x + \varphi_{0i}) - P_r \cos(k_1 x + \varphi_{0r})) \sin(t\omega)$$

$$+ (P_i \sin(-k_1 x + \varphi_{0i}) - P_r \sin(k_1 x + \varphi_{0r})) \cos(t\omega)$$

に注意して合成すれば、

$$u_I(t, x) = u_i(t, x) + u_r(t, x) = U_I(x) \sin(t\omega + \psi_I(x))$$

となる。ここで、

$$\rho_1 c_1 U_I(x) = \sqrt{2P_i^2(1 - \cos\{2k_1 - (\varphi_{0i} - \varphi_{0r})\})} = P \sin(k_1 x - \frac{\varphi_{0i} - \varphi_{0r}}{2})$$

$$\tan \varphi_I(x) = -\frac{P_i \sin(k_1 x - \varphi_{0i}) + P_r \sin(k_1 x + \varphi_{0r})}{P_i \cos(k_1 x - \varphi_{0i}) - P_r \cos(k_1 x + \varphi_{0r})} = \frac{-2 \sin(kx - \frac{\varphi_{0i} - \varphi_{0r}}{2}) \cos \frac{\varphi_{0i} + \varphi_{0r}}{2}}{2 \sin(kx - \frac{\varphi_{0i} - \varphi_{0r}}{2}) \sin \frac{\varphi_{0i} + \varphi_{0r}}{2}}$$

$$= \frac{-\cos \frac{\varphi_{0i} + \varphi_{0r}}{2}}{\sin \frac{\varphi_{0i} + \varphi_{0r}}{2}} = \frac{-\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_{0i} + \varphi_{0r}}{2})}{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_{0i} + \varphi_{0r}}{2})} = -\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_{0i} + \varphi_{0r}}{2}) = \tan(\frac{\varphi_{0i} + \varphi_{0r}}{2} - \frac{\pi}{2})$$

である。

特に、 $P_i = P_r = P > 0$ の場合には、

$$u_I(t, x) = \frac{2P}{\rho_1 c_1} \sin(k_1 x - \frac{\varphi_{0i} - \varphi_{0r}}{2}) \sin(t\omega + \frac{\varphi_{0i} + \varphi_{0r}}{2} - \frac{\pi}{2})$$

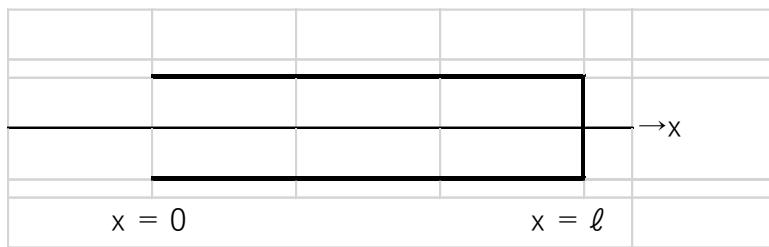
$$= \frac{2P}{\rho_1 c_1} \sin(-k_1 x + \frac{\varphi_{0i} - \varphi_{0r}}{2}) \cos(t\omega + \frac{\varphi_{0i} + \varphi_{0r}}{2})$$

となる。

管の材料は、金属その他の剛体と考えてよい個体で、管の内面は滑らかでかつ内部の太さが一様であるとする。

いま考える音波の波長が管の断面の寸法に比して大きいとその管の中の空気は管の軸に沿って進む平面音波しか起こりえない。（同シリーズ、振動・波動の 241 ページ参照）

管の中心軸に沿って座標 x をとると、管の中の音圧と粒子速度は § 5.1 の場合と全く同じになる。管の長さを ℓ として、5-4 図のように左端を、 $x = 0$ 右端を $x = \ell$ とする。



5-4 図

閉管

閉管というのは、5-4 図のように一端が開き、多端が閉じている（個体あるいは液体との境界面で行き止まりになっている）管である。

入射波

$$p_i(t, x) = P_i \sin(\omega_i t - k_i x + \varphi_{0i})$$

反射波

$$p_r(t, x) = P_r \sin(\omega_i t + k_i x + \varphi_{0r})$$

として、 $P_i = P_r$ と仮定すると、

この場合は、 $\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ に注意して、

管内の、音圧分布は、

$$P(t, x) = 2P_i \cos\left(kx - \frac{\varphi_{0i} - \varphi_{0r}}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_{0i} + \varphi_{0r}}{2}\right)$$

と書けるが、 $x = \ell$ で、音圧の振幅が $2P_i$ であるためには、

$$\varphi_{0i} - \varphi_{0r} = 2kl - 4n\pi \quad (n=0,1,2,\dots)$$

したがって、

$$P(t, x) = 2P_i \cos k(x - l) \sin (\omega t + \varphi_{0i} - kl)$$

もし、 $x = 0$ での音圧が

$$P(t, 0) = P_0 \sin (\omega t)$$

で与えられたとすると、

$$\begin{aligned} P(t, 0) &= 2P_i \cos(kl) (\sin(\omega t) \cos(\varphi_{0i} - kl) + \cos(\omega t) \sin(\varphi_{0i} - kl)) \\ &\quad \sin(\varphi_{0i} - kl) = 0 \\ &\quad \varphi_{0i} - kl = n\pi \\ &\quad \cos(\varphi_{0i} - kl) = \cos(n\pi) = \pm 1 \end{aligned}$$

となるので、

$$P_i = \frac{P_0}{2 \cos kl \cos n\pi}$$

となって、

$$\sin(\omega t + \varphi_{0i} - kl) = \sin(\omega t + n\pi) = \cos(n\pi) \sin(\omega t)$$

に注意して、

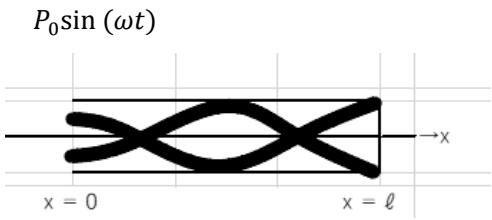
$$P(t, x) = \frac{P_0}{\cos kl} \cos k(x - l) \sin(\omega t)$$

を得る。

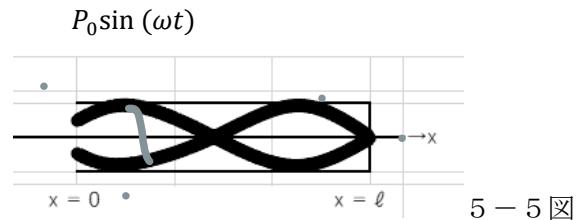
管内の粒子速度は § 5.1 の (28) 式により同様に、

$$u(t, x) = \frac{P_0}{\rho c \cos kl} \sin k(l - x) \cos(\omega t)$$

この場合、管の中の音場は完全な定常波であり、閉ざされた端は音圧の腹、(すなわち粒子速度の節)、そこより $\lambda/2$ ごとに音圧の腹(粒子速度の節)がある。閉端より $\lambda/4$ のところに音圧の節(すなわち粒子速度の腹)があり、そこより $\lambda/2$ ごとに繰り返される。



音圧分布



粒子速度

5-5図

音圧の振幅が無限大となる(分母が 0 となる)のは、

$$kl = (2m + 1)\frac{\pi}{2} \quad (m=0,1,2,,)$$

の時です。これは、

$$k_i = \frac{\omega_i}{c_1} = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi}{c_1} h_i$$

に注意して、

$$\lambda = 4l/(2m + 1), \quad h = c(2m + 1)/(4l) \text{Hz}, \quad l = (2m + 1)\frac{\lambda}{4} \quad (m=0,1,2,,)$$

と言う関係が成り立つとき、式の分母が 0 となり、 P_0 が小さくても管の中の音圧は非常に大きくなる。この状態を閉管の共鳴という。

$L = 104$, $c = 340$, ($m=0,1,2,\dots$) とすれば、

L=104			
m	λ 波長	h(Hz)	
0	416.000	0.817	1
1	138.667	2.452	3
2	83.200	4.087	5
3	59.429	5.721	7

ピーク値の周波数	0.816667の倍数			
	倍率1	倍率2	音圧	
0.266667	1		0.05604	
0.533333	1.999996		0.03093802	
0.816667	3.062497	1	0.01405225	0.816667 1 0.816667
1.583333	5.937491	1.938774	0.0435531	1.633334 2 1.633334 2
2.416667	9.06249	2.959183	0.02416667	2.450001 3
3.216667	12.06249	3.938774	0.03173804	3.266668 4
4.000000	14.99998	4.897957	0.01772484	4.083335 5
4.866667	18.24998	5.959182	0.01728335	4.900002 6
5.466667	20.49998	6.693875	0.01009538	5.716669 7
6.266667	23.49997	7.673467	0.00978232	6.533336 8
9.783333	36.68745	11.97959	0.03974005	

一般には、

$$\lambda_{2m+1} = \frac{4l}{2m+1}, v_{2m+1} = (2m+1)v_1,$$

となる。

この系列で、振幅が小さくなるのは、 $k_1 = n\pi$ の時です。

$$k_i = \frac{\omega_i}{c_1} = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi}{c_1} h_i$$

$$\frac{2\pi}{c_1} h_i L = n\pi$$

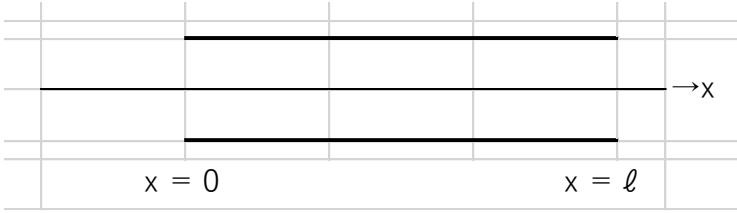
$$h_i = n \frac{c}{2 * 104}$$

1.6346, 3.269, 4.9038 では、振幅は、

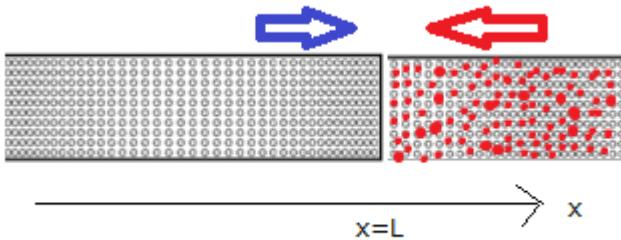
$$\frac{P_0}{cos k l} = p$$

であり、この周波数に関しては、影響は少ない。

開管



5-6 図



上の図で、 $x=L$ の場所が開口端だとします。開口端の左側(管内)の空気粒子は音の影響で左右に振動します。外側の空気の振動が遅れると、開口端($x=L$)での音圧は 0 にはなりません。

管の中の音圧が

$$p_i(t, x) = P_i \sin(\omega_i t - k_i x + \varphi_{0i})$$

の場合は、 $x=L$ での音圧は、

$$p_i(t, L) = P_i \sin(\omega_i t - k_i L + \varphi_{0i})$$

です。この時、外から管の中に向かう音

$$p_r(t, x) = P_r \sin(\omega_i t + k_i x + \varphi_{0r})$$

があつて、この音が、開口でぶつかれば、開口端での圧力はその和となります。

$$p_i(t, L) + p_r(t, L) = P_i \sin(\omega_i t - k_i L + \varphi_{0i}) + P_r \sin(\omega_i t + k_i L + \varphi_{0r})$$

で、次の2つの条件

$$P_i = P_r$$

$$-k_i L + \varphi_{0i} = 2n\pi + \pi + k_i L + \varphi_{0r}$$

が成立すれば、開口端での音圧は、常に 0 となります。

管内の空気粒子が、このような波が外から入ってきたのと同様の動きをしてくれれば、好都合です。

開管というのは、5-6 図のように両端が開いている管である。

入射波

$$p_i(t, x) = P_i \sin(\omega_i t - k_i x + \varphi_{0i})$$

反射波

$$p_r(t, x) = P_r \sin(\omega_i t + k_i x + \varphi_{0r})$$

としてこの和が波動方程式の解であり、境界条件を見たすようにする。

$x=\ell$ で音圧が常に 0 になるので、 $P_i = P_r$ となり、

$$\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad \text{に注意して、}$$

管内の、音圧分布は、

$$P(t, x) = 2P_i \cos\left(kx - \frac{\varphi_{0i} - \varphi_{0r}}{2}\right) \sin(\omega t + \frac{\varphi_{0i} + \varphi_{0r}}{2})$$

と書けるが、 $x = l$ で、音圧の振幅が0であるためには、

$$\varphi_{0i} - \varphi_{0r} = 2kl - 4n\pi + \pi \quad (n=0,1,2,\dots)$$

したがって、

$$P(t, x) = 2P_i \cos(k(x - l) + \pi/2) \sin(\omega t + \varphi_{0i} - kl) = 2P_i \sin(k(l - x)) \sin(\omega t + \varphi_{0i} - kl)$$

$x = 0$ での音圧が

$$P(t, 0) = P_0 \sin(\omega t)$$

で与えられたとすると、

$$\begin{aligned} P(t, 0) &= 2P_i \sin(kl) (\sin(\omega t) \cos(\varphi_{0i} - kl) + \cos(\omega t) \sin(\varphi_{0i} - kl)) \\ &\quad \sin(\varphi_{0i} - kl) = 0 \\ &\quad \varphi_{0i} - kl = n\pi \\ &\quad \cos(\varphi_{0i} - kl) = \cos(n\pi) = \pm 1 \end{aligned}$$

となるので、

$$P_i = \frac{P_0}{2 \sin kl \cos n\pi}$$

となって、

$$\sin(\omega t + \varphi_{0i} - kl) = \sin(\omega t + n\pi) = \cos(n\pi) \sin(\omega t)$$

に注意して、

$$P(t, x) = \frac{P_0}{\sin kl} \sin k(l - x) \sin(\omega t)$$

§ 5.1 の (28) 式により粒子速度は次のようにある。

$$u(t, x) = \frac{P_0}{\rho c \sin kl} \cos k(l - x) \cos(\omega t + \pi)$$

この場合も管の中は完全な定常波の音場で、 $x = l$ での開口端は音圧の節、粒子速度の腹である。5-7 図
音圧の振幅が無限大となる（分母が 0 となる）のは、

$$kl = (m\pi) \quad (m=0,1,2,\dots)$$

の時です。これは、

$$k_i = \frac{\omega_i}{c_1} = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi}{c_1} h_i$$

に注意して、

$$\lambda = 2l/m, \quad h = cm/2l\text{Hz}, \quad l = m\frac{\lambda}{2}, \quad (m=0,1,2,\dots)$$

と言う関係が成り立つとき、式の分母が 0 となり、 P_0 が小さくても管の中の音圧は非常に大きくなる。この状態を閉管の共鳴という。

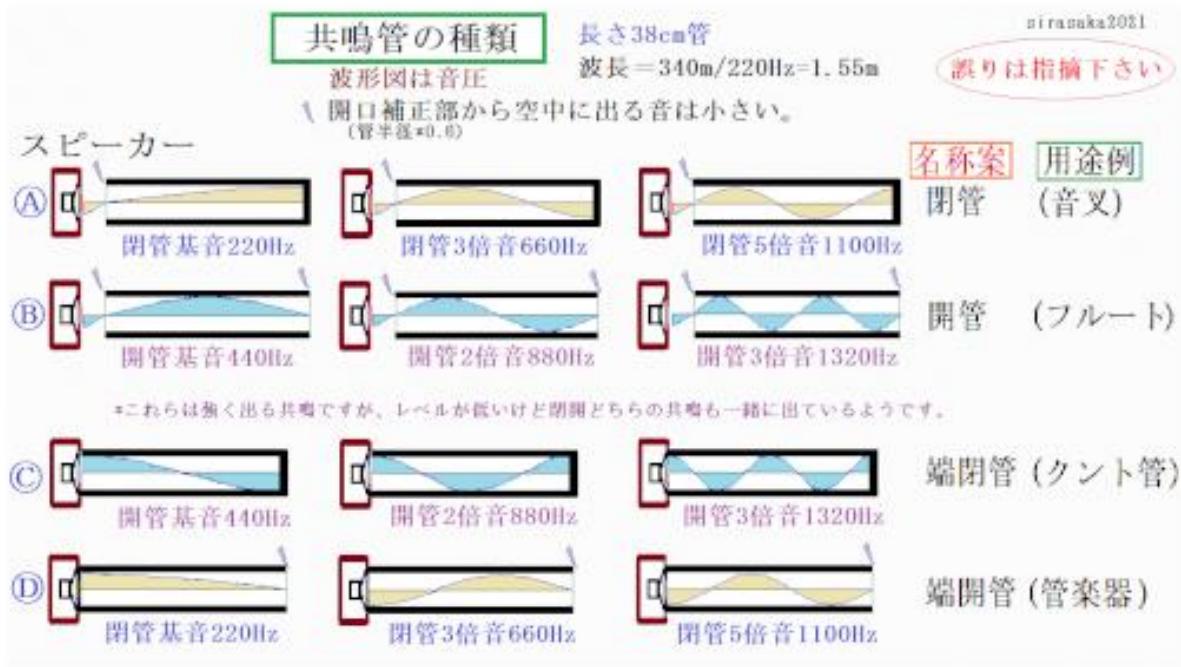
$L = 104$, $c = 340$, ($m=0,1,2,\dots$) とすれば、

L=104			
m	λ 波長	h (Hz)	
1	208.000	1.635	2
2	104.000	3.269	4
3	69.333	4.904	6
4	52.000	6.538	8

ピーク値の周波数	0.816667の倍数			
	倍率1	倍率2	音圧	
0.266667	1		0.05604	
0.533333	1.999996		0.03093802	
0.816667	3.062497	1	0.01405225	0.816667 1 0.816667
1.583333	5.937491	1.938774	0.0435531	1.633334 2 1.633334 2
2.416667	9.06249	2.959183	0.02416667	2.450001 3
3.216667	12.06249	3.938774	0.03173804	
4.000000	14.99998	4.897957	0.01772484	4.083335 5
4.866667	18.24998	5.959182	0.01728335	
5.466667	20.49998	6.693875	0.01009538	5.716669 7
6.266667	23.49997	7.673467	0.00978232	
9.783333	36.68745	11.97959	0.03974005	6.533336 8

とはなるのですが、

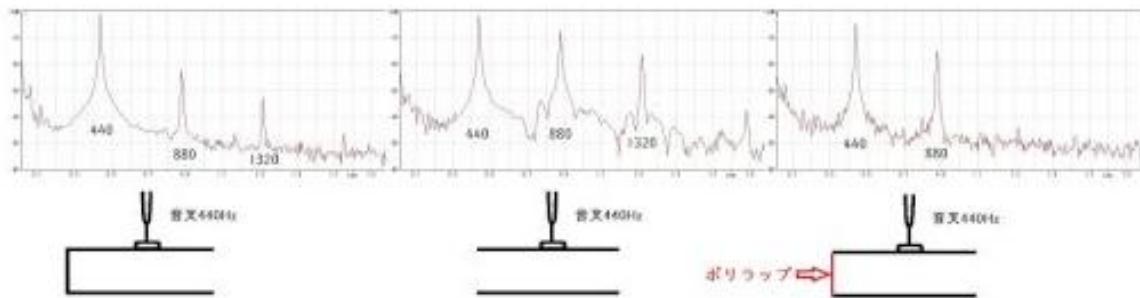
残念ながら開管ではありません。



気になりましたので簡単な実験をしてみました。

理論と実際は実験しないと良く分からないです。

理論と照合して実験の参考になれば幸いです。



7.11 入射波と反射波の干渉

7.11.1 定常波の説明の疑問点

定常波の説明を見ると、

開管では、

入射波

$$p_i(t, x) = P_i \sin(\omega_i t - k_i x + \varphi_{0i})$$

反射波

$$p_r(t, x) = P_r \sin(\omega_i t + k_i x + \varphi_{0r})$$

としてこの和が波動方程式の解であり、境界条件を見たすようにする。

$x = l$ で音圧が常に 0 になるので、 $P_i = P_r$ となり、

$$\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \text{ に注意して、}$$

管内の、音圧分布は、

$$P(t, x) = 2P_i \cos\left(kx - \frac{\varphi_{0i} - \varphi_{0r}}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_{0i} + \varphi_{0r}}{2}\right)$$

と書けるが、 $x = l$ で、音圧の振幅が 0 であるためには、

$$\varphi_{0i} - \varphi_{0r} = 2kl - 4n\pi + \pi \quad (n=0,1,2,\dots)$$

したがって、

$$P(t, x) = 2P_i \cos(k(x - l) + \pi/2) \sin(\omega t + \varphi_{0i} - kl) = 2P_i \sin(k(l - x)) \sin(\omega t + \varphi_{0i} - kl)$$

であると説明し、

閉管では、

入射波

$$p_i(t, x) = P_i \sin(\omega_i t - k_i x + \varphi_{0i})$$

反射波

$$p_r(t, x) = P_r \sin(\omega_i t + k_i x + \varphi_{0r})$$

として、 $P_i = P_r$ と仮定すると、

$$\text{この場合は、 } \sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \text{ に注意して、}$$

管内の、音圧分布は、

$$P(t, x) = 2P_i \cos\left(kx - \frac{\varphi_{0i} - \varphi_{0r}}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_{0i} + \varphi_{0r}}{2}\right)$$

と書けるが、 $x = l$ で、音圧の振幅が $2P_i$ であるためには、

$$\varphi_{0i} - \varphi_{0r} = 2kl - 4n\pi \quad (n=0,1,2,\dots)$$

したがって、

$$P(t, x) = 2P_i \cos k(x - l) \sin(\omega t + \varphi_{0i} - kl)$$

と説明する。

これでは、波が1回は反射するが、2回目、3回目の反射は無視することになる。

例えば、開管の場合、左から入ってきた波が、右の開口端で反射するとしている。その反射波が左の開口端に来た時に、もう一度反射することは無いのでしょうか？

左から入った波が、右側の開口端で反射したとして、その反射波が左の開口端まで来たときに、

1. 反射波はそのまま管の外へ出て行く。
2. 突然消える。
3. もう一度反射して右に戻る。

のうちで、どれが正しいのでしょうか？

そこで、反射と透過について、確認することが必要になります。

媒質の境界面に音波が到達すると、その一部のエネルギーは反射して元の媒質中の反射音となり、一部のエネルギーはほかの媒質中に侵入する。

どちらの媒質も半無限に広がっているとしても、媒質が個体であれば、その中にはそれぞれ伝搬速度が異なる体積変化の波と変形の波の2つがあり得るので（§4.6参照）、たとえその1つの種類の波が境界面に入射する場合でも、反射波や透過波には他の種類の波が同時に生じるのが普通である。

一方の媒質が流体であれば、その中では体積変化の波しか起こりえないのであるが、それでもなお一般の場合は複雑で簡単に説明できない。ただその時に、流体中の入射音の入射角と反射音の反射角は等しいし、入射角 θ_i と透過音の屈折角 θ_t の間には次のSnellの法則が成り立つ。

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{c_1}{c_2}$$

ただし、 c_1 は流体中の音速、 c_2 は第2の媒質の中の音速である。もし第2の媒質が個体ならばそれぞれの種類の波についての音速をとれば θ_t はその波の屈折角になる。

ここでは、流体中の平面波が広い境界面に垂直に入射する場合のみを取り上げる。この場合には第2の媒質が個体であっても、境界面における面に垂直の方向の力の成分は連続であるから、そこに生じる波は定積変化の波だけであり、かつその取扱いは流体同士の間の境界面の場合と全く同じである。

境界面を $x = 0$ にとり、 $x < 0$ の部分を媒質I（流体） $x > 0$ の部分を媒質IIとする。したがって入射音は $x < 0$ の部分にあり、

	I	II	
	c_1	c_2	
	ρ_1	ρ_2	
$p_i(t,x)$		$p_t(t,x)$	
$p_r(t,x)$			
5-1図			

$$p_i(t, x) = P_i \sin(\omega t - k_1 x + \varphi_{0i}) \quad (2)$$

反射波も同じく $x < 0$ の部分にあって、

$$p_r(t, x) = P_r \sin(\omega t + k_1 x + \varphi_{0r}) \quad (3)$$

ただし、媒質 I の音速を c_1 として

$$k_i = \frac{\omega_i}{c_1} = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi}{c_1} h_i$$

λ_1 は角振動数 ω の音の媒質 I の中の波長、 h は周波数である。また、入射音と反射音であるから、

$$\begin{aligned} P_i &> 0, P_r > 0 \\ P_i &\geq P_r \end{aligned}$$

ただし、反射音がないときは

$$P_i > P_r = 0$$

我々は、 P_i と P_r を別々に感じたり、測定したりするのではなくて、その重ね合わせた音波を観測するのであるから、その音波は、

$$p_I(t, x) = p_i(t, x) + p_r(t, x) \quad (6)$$

であり、

$$\begin{aligned} p_I(t, x) &= P_i \sin(\omega t - k_1 x + \varphi_{0i}) + P_r \sin(\omega t + k_1 x + \varphi_{0r}) \\ &= P_I(x) \sin(\omega t + \varphi_I(x)) \end{aligned}$$

と書ける。ここで、

$$\begin{aligned} P_I(x) &= \{(P_i \cos(k_1 x - \varphi_{0i}) + P_r \cos(k_1 x + \varphi_{0r}))^2 + (-P_i \sin(k_1 x - \varphi_{0i}) + P_r \sin(k_1 x + \varphi_{0r}))^2\}^{1/2} \\ &= \{(P_i)^2 + (P_r)^2 + 2P_i P_r \cos(2k_1 x - (\varphi_{0i} - \varphi_{0r}))\}^{1/2} \\ \tan(\varphi_I(x)) &= \frac{-P_i \sin(k_1 x - \varphi_{0i}) + P_r \sin(k_1 x + \varphi_{0r})}{P_i \cos(k_1 x - \varphi_{0i}) + P_r \cos(k_1 x + \varphi_{0r})} \end{aligned}$$

この重ね合わせた音波の振幅 $P_I(x)$ は x の関数となり、

$$\begin{aligned} x &= -m \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\varphi_{0i} - \varphi_{0r}}{2\pi} \frac{\lambda_1}{2} \\ m &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

では、振幅は極大で

$$P_{max} = P_i + P_r$$

となり、

$$\begin{aligned} x &= -m \frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_1}{4} + \frac{\varphi_{0i} - \varphi_{0r}}{2\pi} \frac{\lambda_1}{2} \\ m &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

では、振幅は極小で

$$P_{min} = P_i - P_r$$

したがって、振幅の極大と極小とが $\lambda_1/4$ の間隔で交互に配列していくで動かない。

すなわち $x < 0$ の部分で x 軸に沿って移動してみると音が大きいところと、小さいところが規則正しく並んでいることが分かる。

このような波を一般に定常波（定在波）という。

P_{max} になる場所を定在波の腹、 P_{min} となる場所を定常波の節といふ。

定常波に対して（2）式や（3）式で与えられる普通の波を進行波ともいふ。

特に、

$$P_i = P_r = P > 0$$

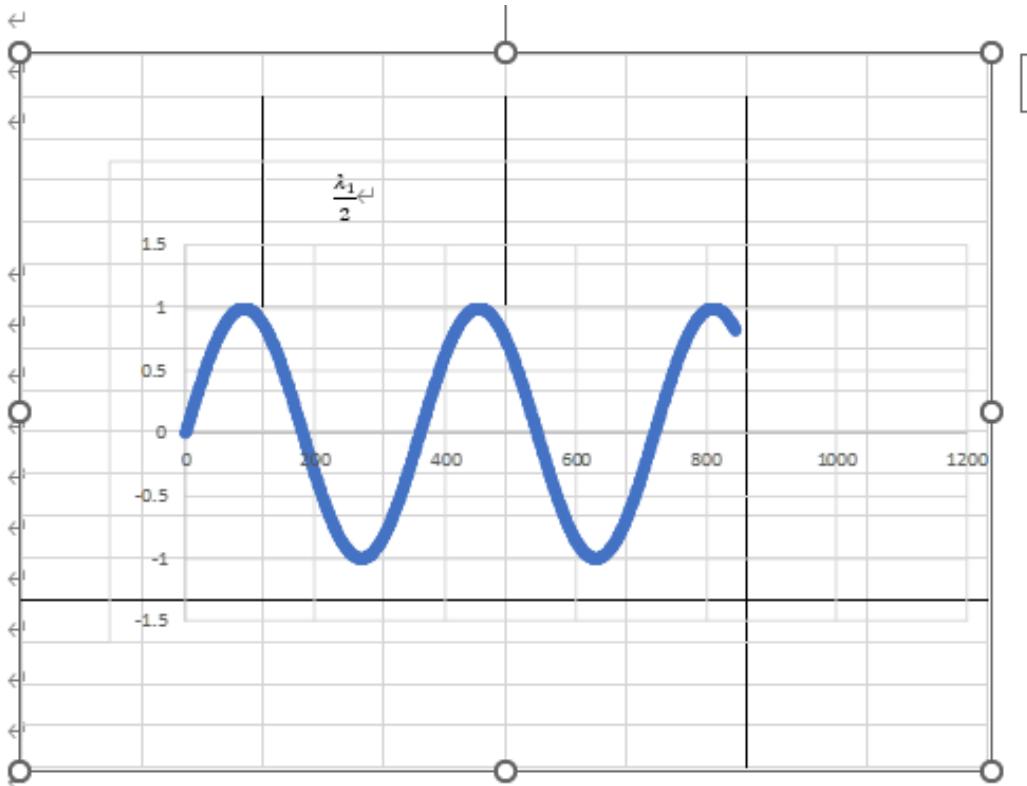
である場合には（7）式は

$$p_I(t, x) = P \{ \sin(\omega t - k_1 x + \varphi_{0i}) + \sin(\omega t + k_1 x + \varphi_{0r}) \}$$

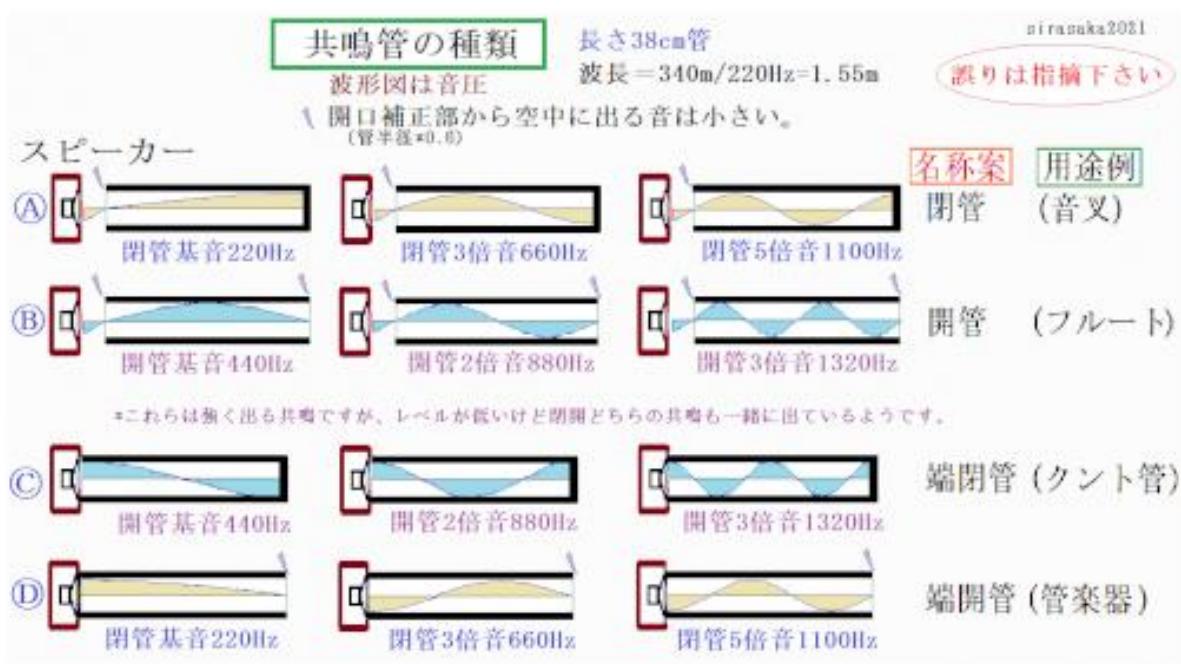
この右辺の和を積に直せば、

$$= 2P \left\{ \sin \left(\omega t + \frac{\varphi_{0i} + \varphi_{0r}}{2} \right) \cos \left(k_1 x - \frac{\varphi_{0i} - \varphi_{0r}}{2} \right) \right\} \quad (14)$$

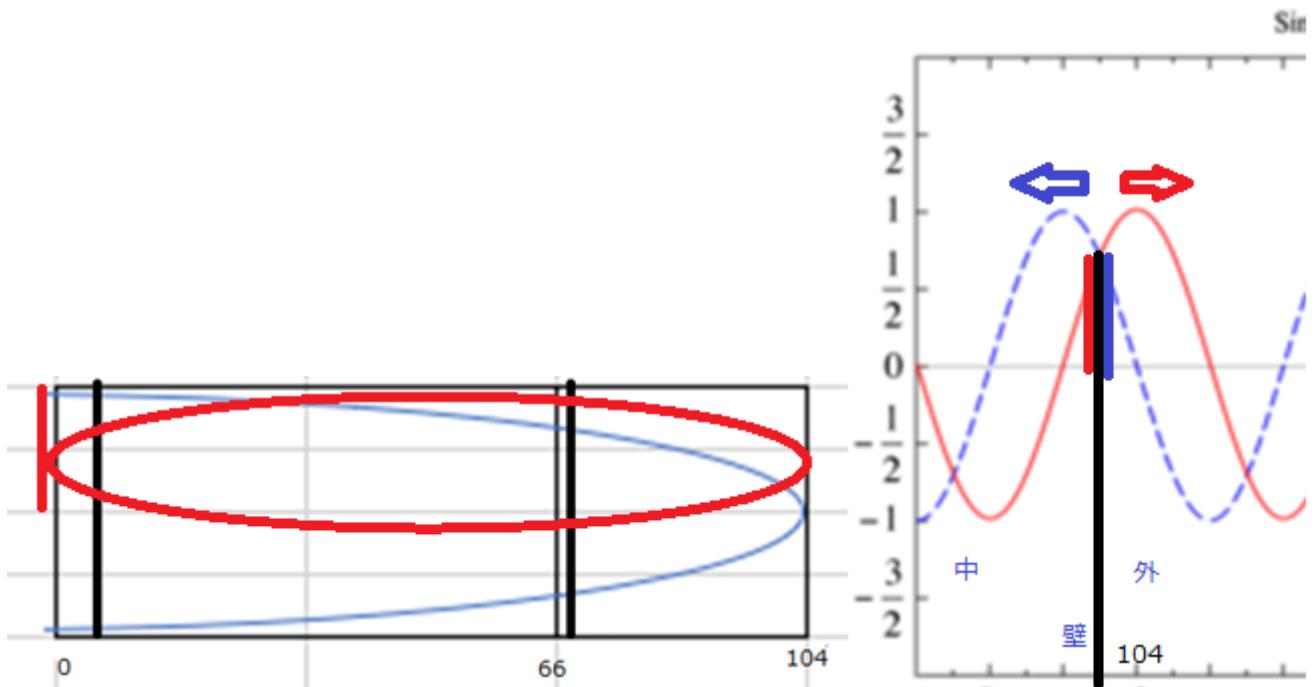
となって、x 軸に沿った各点ですべて同位相の振動が起こっていることになる。



7.11.2 反射波の重ね合わせ（両端反射）



下の図の、壁の部分を管の底、左側が管の中とする。赤い音が壁に当たっても壁は動かない。



これは、壁を取り払って青い波をぶつけてやっても、壁の部分の空気の粒子は動かなくなる。赤い縦の線が左からの圧力、右の青い線が右からの圧力として、これが一致すれば停止する。

入射波

$$p_i(t, x) = P_i \sin(\omega_i t - k_i x + \varphi_{0i})$$

反射波

$$p_r(t, x) = P_r \sin(\omega_i t + k_i x + \varphi_{0r})$$

として、上の条件は、

$$p_i(t, 104) = p_r(t, 104)$$

が成立することである。振幅が同じならば、

$$\varphi_{0r} = -2k_i 104 + \varphi_{0i}$$

$$p_r(t, x) = P_r \sin(\omega_i t + k_i x - 2k_i 104 + \varphi_{0i})$$

振幅が違うと困るが、振幅がほぼ同じ時は、位相に関しては上の式が成立すると考える。

その後で、振幅を変化させることにする。

反射は、地面と、ナセル内の発電機の部分で起こると考える。

壁や天井などの建築部材の吸音性能は、図1のように、入射音のエネルギーを I 、反射音のエネルギーを R とすると、吸音率 α は次式のようく表される。

$$\alpha = \frac{I - R}{I} = \frac{A + T}{I}$$

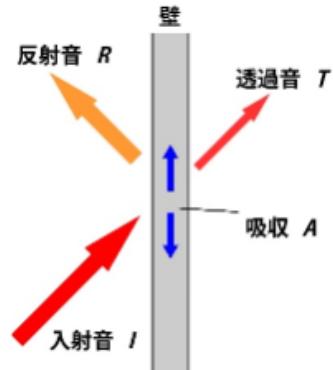


図1 音の入射と反射

表1 吸音率の例¹⁾

	オクターブバンド中心周波数 (Hz)					
	125	250	500	1k	2k	4k
コンクリート打放し面	0.01	0.02	0.02	0.02	0.03	0.04
パイルカーペット 10mm	0.09	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40
グラスウール 16~24kg 50mm・空気層 0mm	0.20	0.65	0.90	0.85	0.80	0.85
グラスウール 16~24kg 50mm・空気層 40mm	0.25	0.80	0.95	0.90	0.85	0.90
石膏ボード 9~12mm・空気層 45mm	0.26	0.13	0.09	0.05	0.05	0.05
岩綿吸音板 12mm・下地石膏ボード捨張・空気層 300mm	0.20	0.20	0.40	0.60	0.70	0.75

コンクリートの床では、

$$0.01 = \frac{I - R}{I}$$

より、 $R=0.99*I$ を得る。ナセルの発電機の部分での反射についても同じ値だと仮定する。

$x=104m$ で反射するとし、さらに、 $P_r = 0.99P_i = P_i$ と考えて、

入射波

$$p_i(t, 104) = P_i \sin(\omega_i t - k_i 104 + \varphi_{0i})$$

反射波

$$\begin{aligned} p_r(t, 104) &= P_r \sin(\omega_i t + k_i 104 + \varphi_{0r}) \\ &= P_i \sin(\omega_i t - k_i 104 + \varphi_{0i}) \end{aligned}$$

が成立するには、

$$\varphi_{0r} = -2k_i 104 + \varphi_{0i}$$

振幅を変化させて、

$$p_r(t, x) = 0.99 * P_i \sin(\omega_i t + k_i x - 2k_i 104 + \varphi_{0i})$$

$x=104$ で反射した波が、 $x=0$ に来た時に再度反射すると考えると、

$$P_r \sin(\omega t + k_1 x + \varphi_{0r}) = P_r \sin(\omega t + k_1 x - 2k_i 104 + \varphi_{0i})$$

2度目の反射波が右に進むと考えて、

$$P_{i2} \sin(\omega t - k_1 x + \varphi_{0i2})$$

さらに、x=0において反射するとして、

$$P_{i2} \sin(\omega t - k_1 0 + \varphi_{0i2}) = P_r \sin(\omega t + k_1 0 - 2k_i 104 + \varphi_{0i})$$

$$\varphi_{0i2} = -2k_i 104 + \varphi_{0i}$$

振幅を修正して、

$$P_{i2} \sin(\omega t - k_1 x - 2k_i 104 + \varphi_{0i}) = (0.99^2) * P_i \sin(\omega t - k_1 x - 2k_i 104 + \varphi_{0i})$$

これは、x=104に於いて、

$$P_{i2} \sin(\omega t - 3k_i 104 + \varphi_{0i})$$

二度目の底での反射波を

$$P_{r2} \sin(\omega t + k_1 x + \varphi_{0r2})$$

とすると、

$$P_{r2} \sin(\omega t + k_1 104 + \varphi_{0r2}) = P_{i2} \sin(\omega t - 3k_i 104 + \varphi_{0i})$$

$$\varphi_{0r2} = -4k_i 104 + \varphi_{0i}$$

振幅を直して、

$$P_{r2} \sin(\omega t + k_1 x + \varphi_{0r2}) = (0.99^3) * P_i \sin(\omega t + k_1 x - 4k_i 104 + \varphi_{0i})$$

さらに、x=0において2度目の反射をするとして、

$$P_{i3} \sin(\omega t - k_1 0 + \varphi_{0i3}) = P_{r2} \sin(\omega t + k_1 0 - 4k_i 104 + \varphi_{0i})$$

$$\varphi_{0i3} = -4k_i 104 + \varphi_{0i}$$

振幅を修正して、

$$P_{i3} \sin(\omega t - k_1 x - 4k_i 104 + \varphi_{0i}) = (0.99^4) * P_i \sin(\omega t - k_1 x - 4k_i 104 + \varphi_{0i})$$

3度目の底での反射波を

$$P_{r3} \sin(\omega t + k_1 x + \varphi_{0r3})$$

とすると、

$$P_{r3} \sin(\omega t + k_1 104 + \varphi_{0r3}) = P_{i3} \sin(\omega t - k_1 104 - 4k_i 104 + \varphi_{0i}) = P_{i3} \sin(\omega t - 5k_i 104 + \varphi_{0i})$$

$$\varphi_{0r3} = -6k_i 104 + \varphi_{0i}$$

振幅を修正して、

$$(0.99^5) * P_i \sin(\omega t + k_1 x - 6k_i 104 + \varphi_{0i})$$

1 度目の入力波

$$P_i \sin(\omega t - k_1 x + \varphi_{0i})$$

2 度目の入力波 (x = 0 での反射波)

$$0.99^2 P_i \sin(\omega t - k_1 x - 2k_i 104 + \varphi_{0i})$$

3 度目の入力波 (x = 0 での反射波)

$$0.99^4 P_i \sin(\omega t - k_1 x - 4k_i 104 + \varphi_{0i})$$

x = 104m での 1 度目の反射波

$$0.99 * P_i \sin(\omega t + k_1 x - 2k_i 104 + \varphi_{0i})$$

x = 104 での 2 度目の反射波

$$(0.99^3) P_i \sin(\omega t + k_1 x - 4k_i 104 + \varphi_{0i})$$

x = 104 での 3 度目の反射波

$$(0.99^5) P_i \sin(\omega t + k_1 x - 6k_i 104 + \varphi_{0i})$$

$2k * 104 = 2n\pi$ ($h = 1.6346 * n$) ならば、

$0.99 * 0.99 = 0.98$ として、これらの和は

$$\left(\frac{P_i}{1 - 0.98} \right) \sin(\omega t - k_1 x + \varphi_{0i}) + \left(\frac{0.99 * P_i}{1 - 0.98} \right) \sin(\omega t + k_1 x + \varphi_{0i})$$

となる。

以前の式、

$$\begin{aligned} p_I(t, x) &= P_i \sin(\omega t - k_1 x + \varphi_{0i}) + P_r \sin(\omega t + k_1 x + \varphi_{0r}) \\ &= P_I(x) \sin(\omega t + \varphi_I(x)) \end{aligned}$$

と書ける。ここで、

$$\begin{aligned} P_I(x) &= \{(P_i \cos(k_1 x - \varphi_{0i}) + P_r \cos(k_1 x + \varphi_{0r}))^2 + (-P_i \sin(k_1 x - \varphi_{0i}) + P_r \sin(k_1 x + \varphi_{0r}))^2\}^{1/2} \\ &= \{(P_i)^2 + (P_r)^2 + 2P_i P_r \cos(2k_1 x - (\varphi_{0i} - \varphi_{0r}))\}^{1/2} \\ \tan(\varphi_I(x)) &= \frac{-P_i \sin(k_1 x - \varphi_{0i}) + P_r \sin(k_1 x + \varphi_{0r})}{P_i \cos(k_1 x - \varphi_{0i}) + P_r \cos(k_1 x + \varphi_{0r})} \end{aligned}$$

で、 $\varphi_{0i} = \varphi_{0r}$ としたものが使える。

$$\{(P_i)^2 + (P_r)^2 + 2P_i P_r \cos(2k_1 x - (\varphi_{0i} - \varphi_{0r}))\}^{1/2} = \{(P_i)^2 + (P_r)^2 + 2P_i P_r \cos(2k_1 x)\}^{1/2}$$

この重ね合わせた音波の振幅 $P_I(x)$ は x の関数となり、

$$\begin{aligned} 2k_1 x &= 2m\pi \\ k_i &= \frac{\omega_i}{c_1} = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi}{c_1} h_i \end{aligned}$$

より、

$$x = m \frac{\lambda_1}{2} = m \frac{ch}{2}$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

では、振幅は極大で

$$P_{max} = P_i + P_r$$

となり、

$$2k_1x = 2m\pi + \pi$$

$$x = \left(m + \frac{1}{2}\right) * \frac{\lambda_1}{2} = \left(m + \frac{1}{2}\right) * \frac{ch}{2}$$

$$m=0, 1, 2, \dots$$

では、振幅は極小で

$$P_{min} = P_i - P_r$$

となる。

$$2k * 104 = 2n\pi \quad (h = 1.6346 * n) \text{ より、}$$

$h = 1.6346$ の場合は、 $m = 0$ で $x = 0$, $m = 1$ で $x = 104$ では、音圧の振幅は極大で

$$P_{max} = \left(\frac{P_i}{1 - 0.98}\right) + \left(\frac{0.99 * P_i}{1 - 0.98}\right) = 99.5P_i$$

$m = 0$ で $x = 104/2 = 52m$, ($m = 1$ で $x = 104 * 3/2$ は管の外で除外する。) では音圧の振幅は極小で

$$P_{min} = \left(\frac{P_i}{1 - 0.98}\right) - \left(\frac{0.99 * P_i}{1 - 0.98}\right) = 0.5P_i$$

$h = 1.6346 * n$ でも同様。

閉管での共鳴では、

$$h = \frac{340(2m+1)}{4 * 104} = 0.8173(2m+1)$$

$$(m=0,1,2,\dots)$$

の場合すなわち、 $2k * 104 = 2n\pi + \pi$ の場合に共鳴が起こる。

また、反射波の重ね合わせで。

$$2k * 104 = 2n\pi \quad (h = 1.6346 * n)$$

の場合も、高い音圧が塔の中で発生する。これは、中から塔をたたく効果があります。

これを合わせて考えると、 $2k * 104 = n\pi$ となる波数 k の周波数の音が大きいと言える。

コンピュータでの計算

これは、開口端にある発電機で反射するケース。

1度目の入力波

$$P_i \sin(\omega t - k_1 x + \varphi_{0i})$$

2度目の入力波 (x = 0 での反射波)

$$0.99^2 P_i \sin(\omega t - k_1 x - 2k_i 104 + \varphi_{0i})$$

3度目の入力波 (x = 0 での反射波)

$$0.99^4 P_i \sin(\omega t - k_1 x - 4k_i 104 + \varphi_{0i})$$

x = 104m での 1 度目の反射波

$$0.99 * P_i \sin(\omega t + k_1 x - 2k_i 104 + \varphi_{0i})$$

x = 104 での 2 度目の反射波

$$(0.99^3) P_i \sin(\omega t + k_1 x - 4k_i 104 + \varphi_{0i})$$

x = 104 での 3 度目の反射波

$$(0.99^5) P_i \sin(\omega t + k_1 x - 6k_i 104 + \varphi_{0i})$$

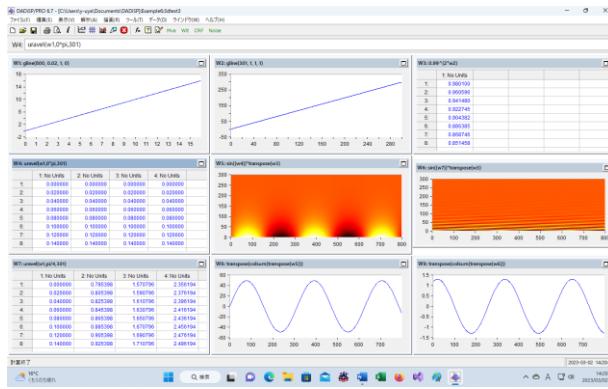
$2k * 104 = 2n\pi + \delta$ 、 $0 < \delta < 2\pi$ 、 $\varphi_{0i} = 0$ 、として足してみると、

$$\begin{aligned} & P_i \sin(\omega t - k_1 x) + 0.99 * P_i \sin(\omega t + k_1 x - \delta) \\ & + 0.99^2 * P_i \sin(\omega t - k_1 x - \delta_i) + 0.99^3 * P_i \sin(\omega t + k_1 x - 2\delta) \\ & + 0.99^4 * P_i \sin(\omega t - k_1 x - 2\delta_i) + 0.99^5 * P_i \sin(\omega t + k_1 x - 3\delta) \end{aligned}$$

$0 < x < 4\pi$ と置き、 δ を変えてみる

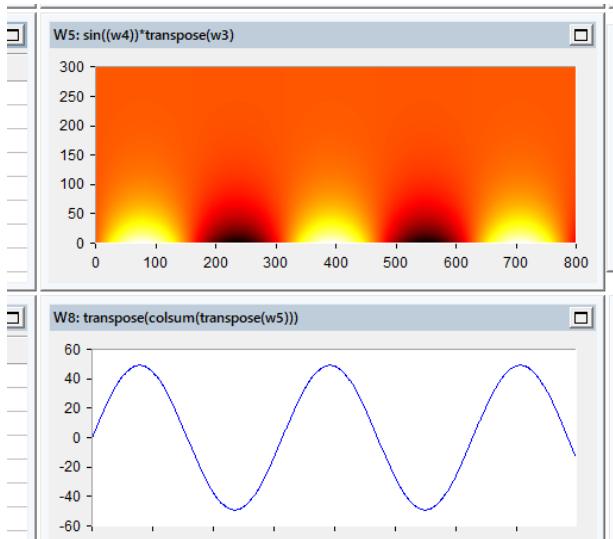
$$\begin{aligned} & P_i \sin(x) \\ & + 0.99^2 * P_i \sin(x - 2\delta_i) \\ & + 0.99^4 * P_i \sin(x - 4\delta_i) \\ & + \dots \end{aligned}$$

300 回加算して、

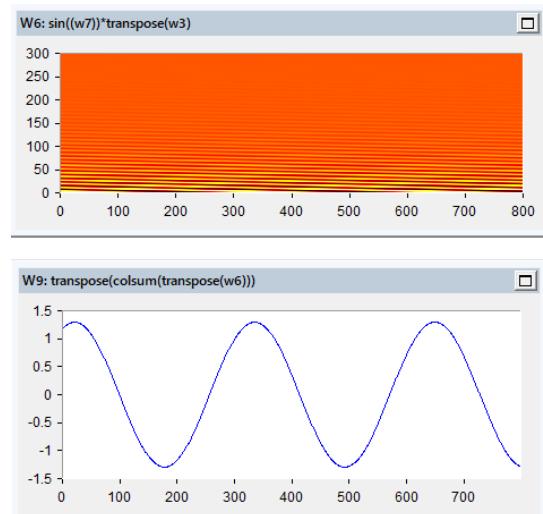


$\delta = 0$ だと、振幅は 49 度程。

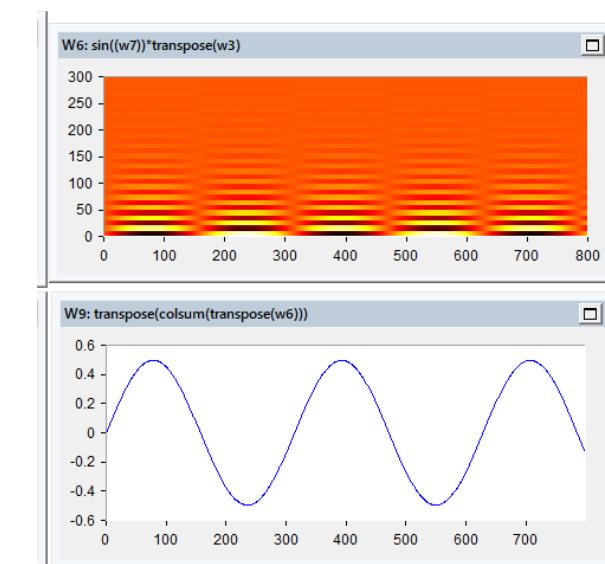
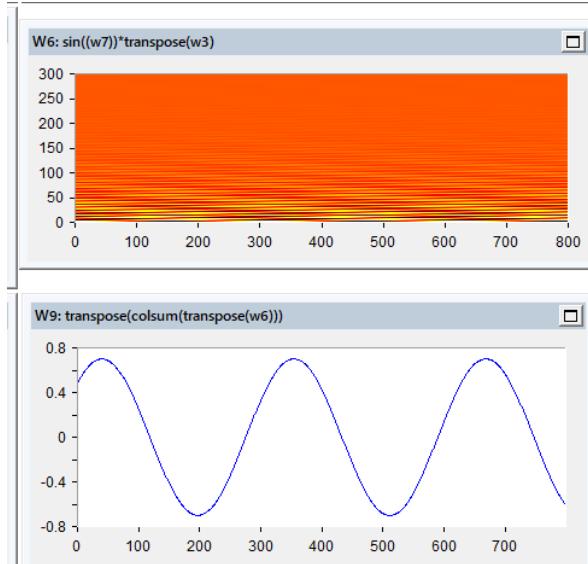
$\delta = \pi/4$ だと、振幅は 1.29 度程です。



$\delta = \pi/2$ だと、振幅 0.699 くらい。

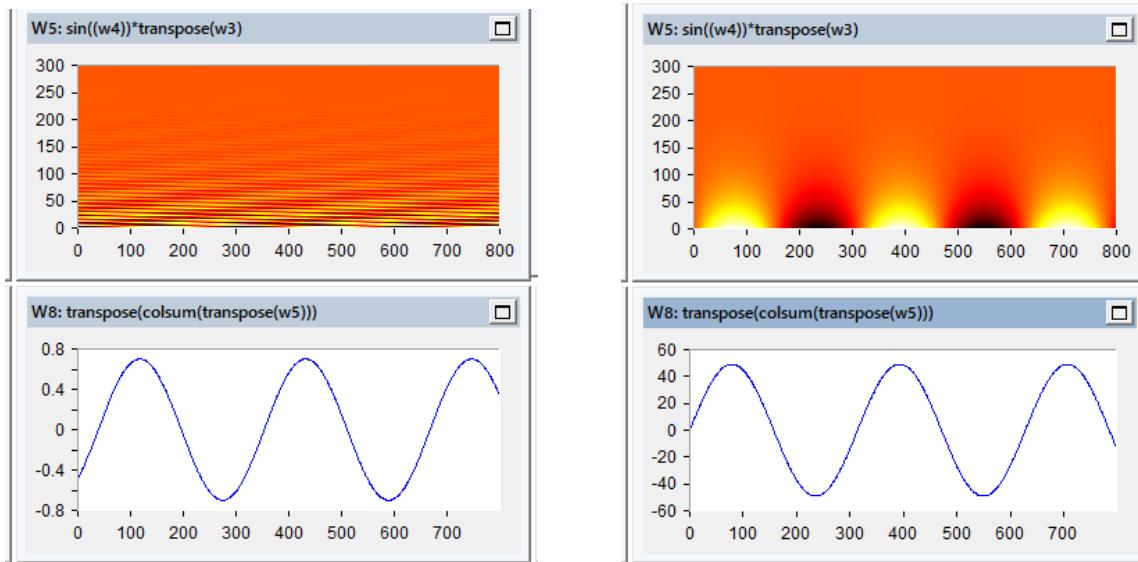


$\delta = \pi$ では、振幅 0.49 くらい。

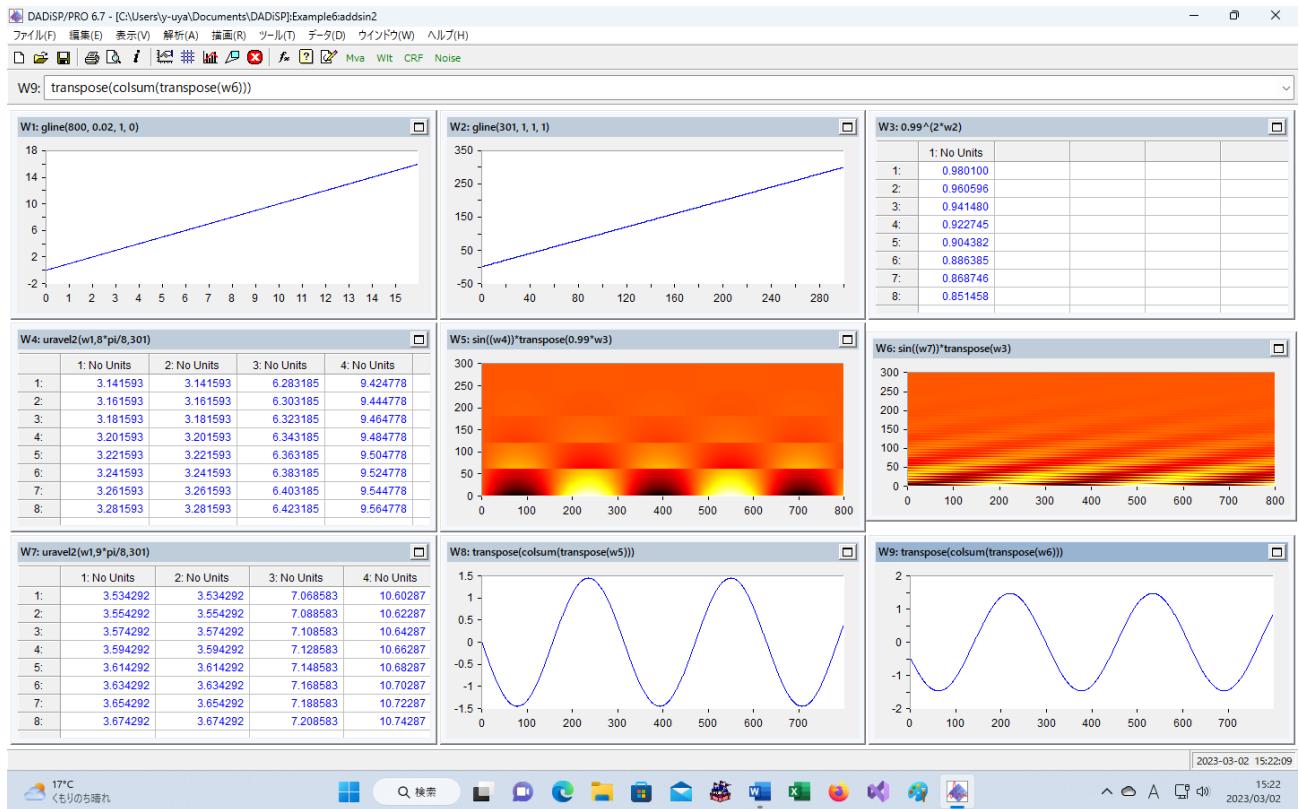


$\delta = 3\pi/2$ だと、振幅 0.699 くらい

$\delta = 4\pi/2$ だと、振幅 49 くらい

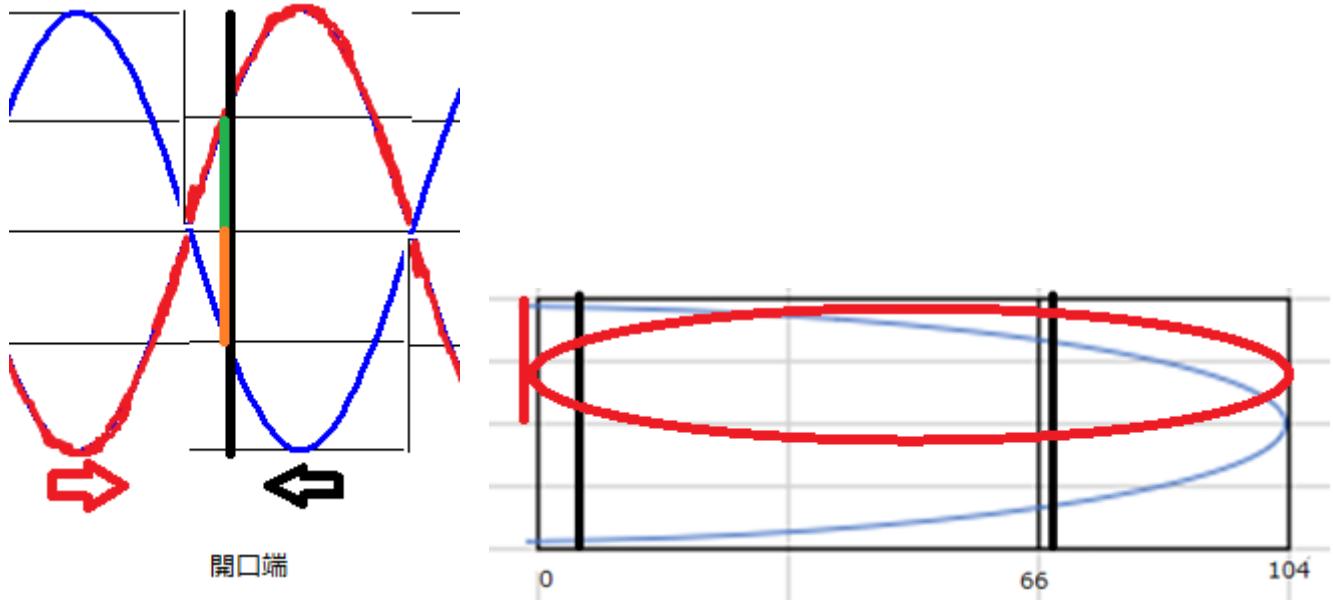


右側の和も同様、 $2n\pi$ で大きく、 $n\pi$ で小さい。



開口端での疑似反射

下の図の、開口端を考える。壁の場合は、動かないように音圧を加えたが、開口端では、音圧が0になるように外からの音圧をかける。



入射波

$$p_i(t, x) = P_i \sin(\omega_i t - k_i x + \varphi_{0i})$$

反射波

$$p_r(t, x) = P_r \sin(\omega_i t + k_i x + \varphi_{0r})$$

として、右の底が動かない条件は、

$$p_i(t, 104) = p_r(t, 104)$$

が成立することである。振幅が同じならば、

$$\varphi_{0r} = -2k_i 104 + \varphi_{0i}$$

$$p_r(t, x) = P_r \sin(\omega_i t + k_i x - 2k_i 104 + \varphi_{0i})$$

振幅については、閉口端で、

$$0.01 = \frac{I - R}{I}$$

として、 $R = 0.99 * I$ 。よって、 $P_r = 0.99 P_i$

$$p_r(t, x) = 0.99 P_i \sin(\omega_i t + k_i x - 2k_i 104 + \varphi_{0i})$$

反射波

$$p_r(t, x) = P_r \sin(\omega_i t + k_i x + \varphi_{0r})$$

が開口端に来た時に、これに対する疑似入射波

$$p_{i2}(t, x) = P_{i2} \sin(\omega_i t - k_i x + \varphi_{0i2})$$

が $x = 0$ で音圧 0 の条件を満たせば、

$$p_{i2}(t, 0) = -p_r(t, 0)$$

$$P_{i2} \sin(\omega_i t - k_i 0 + \varphi_{0i2}) = -P_r \sin(\omega_i t + k_i 0 + \varphi_{0r})$$

が成立することである。振幅が同じならば、

$$\varphi_{0i2} = \pi + \varphi_{0r}$$

$$p_{i2}(t, x) = P_{i2} \sin(\omega_i t - k_i x + \pi + \varphi_{0r})$$

振幅が違うと困るが、振幅がほぼ同じ時は、位相に関しては上の式が成立すると考える。

その後で、振幅を変化させることにする。

開口端でも、

$$0.01 = \frac{I - R}{I}$$

として、 $R=0.99*I$ 。 $P_{i2} = 0.99P_r$ （開口端では $P_{i2} = 0.999P_r$ とした方がよいが計算が面倒。）と考えて、振幅を変化させて、

$$\begin{aligned} p_{i2}(t, x) &= 0.99 * P_r \sin(\omega_i t - k_i x + \pi + \varphi_{0r}) \\ &= 0.99^2 * P_i \sin(\omega_i t - k_i x + \pi - 2k_i 104 + \varphi_{0i}) \end{aligned}$$

$x=0$ から入ってきた波 $p_{i2}(t, x)$ が、 $x=104$ に来た時に再度反射すると考えると、

$$p_{i2}(t, 104) = 0.99^2 * P_i \sin(\omega_i t - k_i 104 + \pi - 2k_i 104 + \varphi_{0i})$$

反射波を

$$P_{r2} \sin(\omega t + k_1 x + \varphi_{0r2})$$

とおいて、

$$\begin{aligned} p_{r2}(t, 104) &= P_{r2} \sin(\omega t + k_1 104 + \varphi_{0r2}) = 0.99^2 * P_i \sin(\omega_i t + \pi - 3k_i 104 + \varphi_{0i}) \\ \varphi_{0r2} &= \pi - 4k_i 104 + \varphi_{0i} \end{aligned}$$

さらに、振幅を調整して、

$$p_{r2}(t, x) = 0.99^3 * P_i \sin(\omega_i t + k_1 x + \pi - 4k_i 104 + \varphi_{0i})$$

これが開口端での疑似反射で

$$p_{i3}(t, x) = P_{i3} \sin(\omega_i t - k_i x + \varphi_{0i3})$$

となるとして、

$$\begin{aligned} p_{i3}(t, 0) &= P_{i3} \sin(\omega_i t - k_i 0 + \varphi_{0i3}) = -p_{r2}(t, 0) = 0.99^3 * P_i \sin(\omega_i t + k_1 0 + 2\pi - 4k_i 104 + \varphi_{0i}) \\ \varphi_{0i3} &= 2\pi - 4k_i 104 + \varphi_{0i} \end{aligned}$$

振幅を調整して

$$p_{i3}(t, x) = 0.99^4 * P_i \sin(\omega_i t - k_i x + 2\pi - 4k_i 104 + \varphi_{0i})$$

まとめなおして、

入力波 1

$$p_i(t, x) = P_i \sin(\omega_i t - k_i x + \varphi_{0i})$$

入力波 2

$$p_{i2}(t, 104) = 0.99^2 * P_i \sin(\omega_i t - k_i x + \pi - 2k_i 104 + \varphi_{0i})$$

入力波 3

$$p_{i3}(t, x) = 0.99^4 * P_i \sin(\omega_i t - k_i x + 2\pi - 4k_i 104 + \varphi_{0i})$$

反射波 1

$$p_r(t, x) = 0.99 P_i \sin(\omega_i t + k_i x - 2k_i 104 + \varphi_{0i})$$

反射波 2

$$p_{r2}(t, x) = 0.99^3 * P_i \sin(\omega_i t + k_1 x + \pi - 4k_i 104 + \varphi_{0i})$$

反射波 3

$$p_{r3}(t, x) = 0.99^4 * P_i \sin(\omega_i t + k_1 x + 2\pi - 6k_i 104 + \varphi_{0i})$$

$2k * 104 = 2n\pi + \pi$ の場合は、

入力波 1

$$p_i(t, x) = P_i \sin(\omega_i t - k_i x + \varphi_{0i})$$

入力波 2

$$p_{i2}(t, 104) = 0.99^2 * P_i \sin(\omega_i t - k_i x + \varphi_{0i})$$

入力波 3

$$p_{i3}(t, x) = 0.99^4 * P_i \sin(\omega_i t - k_i x + \varphi_{0i})$$

反射波 1

$$p_r(t, x) = -0.99 P_i \sin(\omega_i t + k_i x + \varphi_{0i})$$

反射波 2

$$p_{r2}(t, x) = -0.99^3 * P_i \sin(\omega_i t + k_1 x + \varphi_{0i})$$

反射波 3

$$p_{r3}(t, x) = -0.99^4 * P_i \sin(\omega_i t + k_1 x + \varphi_{0i})$$

合計して、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{P_i}{1 - 0.98} \right) \sin(\omega_i t - k_1 x + \varphi_{0i}) + \left(\frac{-0.99 * P_i}{1 - 0.98} \right) \sin(\omega_i t + k_1 x + \varphi_{0i}) \\ &= \left(\left(\frac{P_i}{1 - 0.98} \right) + \left(\frac{-0.99 * P_i}{1 - 0.98} \right) \right) \cos k_1 x \sin(\omega_i t + \varphi_{0i}) + \left(\left(\frac{-P_i}{1 - 0.98} \right) + \left(\frac{-0.99 * P_i}{1 - 0.98} \right) \right) \sin k_1 x \cos(\omega_i t + \varphi_{0i}) \\ &= (0.5 P_i) \cos k_1 x \sin(\omega_i t + \varphi_{0i}) - (99.5) P_i \sin k_1 x \cos(\omega_i t + \varphi_{0i}) \\ &\cong -(99.5) P_i \sin k_1 x \cos(\omega_i t + \varphi_{0i}) \end{aligned}$$

振幅の大きな波となる。

注意： $099 * 099 = 098$ を、 $0.99 * 0.999 = 0.989$ に変えると、99.5 が 181 になる。

コンピュータでの計算

入力波 1

$$p_i(t, x) = P_i \sin(\omega_i t - k_i x + \varphi_{0i})$$

入力波 2

$$p_{i2}(t, 104) = 0.99^2 * P_i \sin(\omega_i t - k_i x + \pi - 2k_i 104 + \varphi_{0i})$$

入力波 3

$$p_{i3}(t, x) = 0.99^4 * P_i \sin(\omega_i t - k_i x + 2\pi - 4k_i 104 + \varphi_{0i})$$

反射波 1

$$p_r(t, x) = 0.99 P_i \sin(\omega_i t + k_i x - 2k_i 104 + \varphi_{0i})$$

反射波 2

$$p_{r2}(t, x) = 0.99^3 * P_i \sin(\omega_i t + k_1 x + \pi - 4k_i 104 + \varphi_{0i})$$

反射波 3

$$p_{r3}(t, x) = 0.99^4 * P_i \sin(\omega_i t + k_1 x + 2\pi - 6k_i 104 + \varphi_{0i})$$

$2k * 104 = 2n\pi + \delta$ 、 $0 < \delta < 2\pi$ 、 $\varphi_{0i} = 0$ 、として足してみると、

$$\begin{aligned} & P_i \sin(\omega t - k_1 x) + 0.99 * P_i \sin(\omega t + k_1 x - \delta) \\ & + 0.99^2 * P_i \sin(\omega t - k_1 x + \pi - \delta_i) + 0.99^3 * P_i \sin(\omega t + k_1 x + \pi - 2\delta) \\ & + 0.99^4 * P_i \sin(\omega t - k_1 x + 2\pi - 2\delta_i) + 0.99^5 * P_i \sin(\omega t + k_1 x + 2\pi - 3\delta) \end{aligned}$$

$0 < X = \omega t - kx < 4\pi$ と置き、 δ を変えてみる

$$\begin{aligned} & P_i \sin(X) \\ & + 0.99^2 * P_i \sin(X + \pi - \delta_i)) \\ & + 0.99^4 * P_i \sin(X + 2\pi - 2\delta_i) \\ & + \dots \end{aligned}$$

この式は、

$$\begin{aligned} & P_i \sin(x) \\ & + 0.99^2 * P_i \sin(x - 2\delta_i)) \\ & + 0.99^4 * P_i \sin(x - 4\delta_i) \\ & + \dots \end{aligned}$$

での、 2δ を $(\pi - \delta)$ に置き換えたものであり、前の結果と同様になる。

$\delta = \pi$ だと、振幅は 49 度。

$\delta = \pi/2$ だと、振幅は 1.29 度です。

$\delta = 0$ だと、振幅 0.699 くらい。

$\delta = \pi$ では、振幅 0.49 くらい。

$\delta = -2\pi$ だと、振幅 0.699 くらい

$\delta = -3\pi$ だと、振幅 49 くらい

右側の和も同様、 $2n\pi$ で大きく、 $n\pi$ で小さい。

7.11.3 ナセルの材質と音波の反射及び透過について

風車の塔の上には発電機を包む小屋のようなものがあります。これをナセルといいます。いくつかの例から、ナセルの大きさは直径 10 メートル以上あると考えます。ここでは 10m とする。簡単のために形は円柱形で、上部は平面とする。このナセル部分の材質は、薄い鋼板だと考える。

正弦音波

波長 λ 、周波数 f （周期 $T = 1/f$ ）の正弦波音波を考える。ある時間を固定して、音波の x 軸方向の変化（進行方向を x とする）を考える。

これは、波長 λ の周期の正弦波になる。そして、時間経過とともに、その等位相波面が伝搬方向に音速 c の速さで伝搬していく。従って、場所 x を固定して、時間 t に関する変化を観測すると、周期 T で変動する正弦波が観測される。これらの様子を具体的に示すと、まず、場所 x における位相変化量は、周波数が f なので、1 秒間に f 波長分の波が通過する。1 波長あたり位相は 2π 変化するから、 $2\pi f$ となる。

$$p(t, x) = \sin(\omega(t - \frac{x}{c}) + \theta) \text{において、} t \text{ が } 1 \text{ だけ増えたとき位相が } 2\pi f \text{ 増えるので、} \omega = 2\pi f \text{ となり、}$$

$$p(t, x) = \sin(\omega(t - \frac{x}{c}) + \theta) = \sin(2\pi f(t - \frac{x}{c}) + \theta) \text{を得る。}$$

また、音の速さを c として、1 秒間に c だけ進む間に、波長が λ なので、基本周期の長さの区切りは、 $\frac{c}{\lambda}$ 回だけ現れる。この値は地点 x で観測される周期的な変動の回数である。

よって、 $f = \frac{c}{\lambda}$ すなわち、 $c = \lambda f = \frac{\lambda}{T}$ となる。

これらのことから、正の方向に音速 c で伝わる正弦音波の音圧 p は、

振幅を $|p|$ 、角周波数 $\omega = 2\pi f$ 、波数 $k = \frac{\omega}{c}$ とし、さらに、 $\tau = t - \frac{x}{c}$ とおくと、

$$p(t, x) = |p| \sin(2\pi f(t - x/c) + \theta) = -|p| \sin(k(x - ct) - \theta) = |p| \sin(\omega\tau + \theta)$$

となる。

三角関数の加法定理、 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ に注意して、

周波数が同じ波の合成は、

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= |p_1| \sin(\omega\tau + \theta_1) + |p_2| \sin(\omega\tau + \theta_2) \\ &= \sqrt{(|p_1| \cos \theta_1 + |p_2| \cos \theta_2)^2 + (|p_1| \sin \theta_1 + |p_2| \sin \theta_2)^2} \sin(\omega\tau + \theta_3) \end{aligned}$$

$$\text{ただし、} \tan \theta_3 = \frac{|p_1| \sin \theta_1 + |p_2| \sin \theta_2}{|p_1| \cos \theta_1 + |p_2| \cos \theta_2}$$

微分、積分は

$$\frac{dp(\tau)}{d\tau} = \omega | p | \cos(\omega\tau + \theta) = \omega | p | \sin(\omega\tau + \theta + \pi/2)$$

$$\int p(\tau)d\tau = \frac{-1}{\omega} | p | \cos(\omega\tau + \theta) = \frac{1}{\omega} | p | \sin(\omega\tau + \theta - \pi/2)$$

また、積については

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \quad \text{及び} \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

より、 $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$ となるので、

$$\begin{aligned} p_1 p_2 &= | p_1 | \sin(\omega\tau + \theta_1) | p_2 | \sin(\omega\tau + \theta_2) \\ &= \frac{| p_1 | | p_2 |}{2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos(2\omega\tau + \theta_1 + \theta_2)) \\ &= \frac{| p_1 | | p_2 |}{2} (\sin(2\omega\tau + \theta_1 + \theta_2 - \pi/2) - \sin(\theta_1 - \theta_2 - \pi/2)) \end{aligned}$$

複素表示

無限級数への展開を考えれば、 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ となるので、音場は、 $p(\tau) = | p | \sin(\omega\tau - \theta) = \operatorname{Im}(| p | \exp(i(\omega\tau - \theta)))$ とかける。

関数 $p(\tau) = | p | \sin(\omega\tau - \theta)$ を、複素関数 $p(\tau) = | p | \exp(i(\omega\tau - \theta))$ に拡張して考える。

すると、微分、積分は

$$\frac{dp(\tau)}{d\tau} = i\omega p(\tau), \quad \int p(\tau)d\tau = \frac{1}{i\omega} p(\tau), \quad \text{ようするに、}\exp \text{ 関数に置き換えて計算し、最後に、虚部をとればよい。}$$

$p_i = P_i \sin(t\omega - k_1 x + \varphi_{0i})$ として入ってきて、管の底で反射して $p_r = P_r \sin(t\omega + k_1 x + \varphi_{0r})$ として戻ってくる。これが

重なって、 $p_i + p_r = P_i \sin(t\omega - k_1 x + \varphi_{0i}) + P_r \sin(t\omega + k_1 x + \varphi_{0r})$ となる。

複素表示で、 $p_i + p_r = P_i \exp(i(t\omega - k_1 x + \varphi_{0i})) + P_r \exp(i(t\omega + k_1 x + \varphi_{0r}))$ とかける。

$$u_x = -\frac{1}{\rho} \int \frac{\partial p}{\partial x} dt = -\frac{1}{\rho} \int \frac{\partial p_i}{\partial x} dt = P_i k_1 \frac{1}{\rho\omega} \sin(t\omega - k_1 x + \varphi_{0i})$$

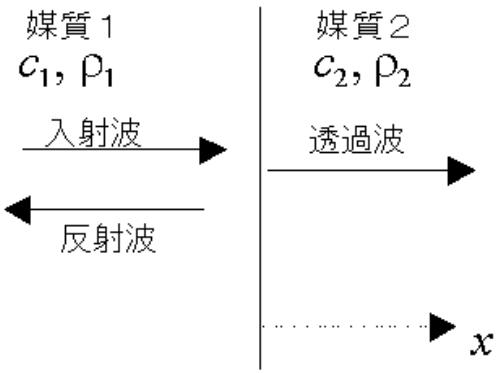
ここで、 $\frac{\omega}{k_1} = c_1$ とおけば、入射波における粒子速度は、 $u_i(t, x) = \frac{p_i(t, x)}{\rho_1 c_1}$ であり、

平面波、 $p(t, x) = f(t - \frac{x}{c})$ について、速度 c が波の速度である。

$p_i = P_i \sin(\omega(t - (k_1/\omega)x))$ で、速度 $c = \omega/k_1$ となる。したがって、 $\rho c = \rho \omega/k_1$ となる。

複素インピーダンス Z を、 $Z = \rho c = \rho \omega/k_1$ (ρ は密度、 c は速度) とおく。

平面境界に平面波が垂直入射した場合



図のように、 $x = 0$ の境界面を隔てて、2つの媒質（各々を添え字1, 2を付けて表す）が接している。境界面の左側（入射側）に平面波が入射する場合、その一部は境界で反射し、全体では次式のように両者の重ね合わせとなる。

複素表示、 $p_i + p_r = P_i \exp(i(t\omega - k_1 x + \varphi_{0i})) + P_r \exp(i(t\omega + k_1 x + \varphi_{0r}))$ で、 $t=0$ 、 $\varphi=0$ とおけば、境界面の左側では、

$$p_i + p_r = P_i \exp(-ik_1 x) + P_r \exp(ik_1 x)$$

$$u_i + u_r = U_i \exp(-ik_1 x) + U_r \exp(ik_1 x) \quad x < 0$$

となる。

一方、境界面の右側（透過側）に透過する平面波は次式で表せる。

$$p_t = P_t \exp(-ik_2 x)$$

$$u_t = U_t \exp(-ik_2 x) \quad x > 0$$

両 媒 質 の 境 界 面 $x = 0$ に お い て 次 の 2 つ の 条 件 が 成 立 す る 。

音圧 p が等しく、 $p_i + p_r = p_t$ 、また粒子速度 v も等しい $u_i + u_r = u_t$ 。

音圧と粒子速度の関係 $p_i(t, x) = \rho c u_i(t, x)$ を上式に代入することにより以下の結果を得る。

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} = - \frac{\partial p_i}{\partial x}$$

$$u_i = -\frac{1}{\rho} \int \frac{\partial p_i}{\partial x} dt = -\frac{1}{\rho} \int \frac{\partial p_i}{\partial x} dt = P_i k_1 \frac{1}{\rho \omega} \sin(t\omega - k_1 x + \varphi_{0i})$$

ここで、 $\frac{\omega}{k_1} = c_1$ とおけば、入射波における粒子速度は、 $u_i(t, x) = \frac{p_i(t, x)}{\rho_1 c_1}$ であり、

$$\rho \frac{\partial u_r}{\partial t} = - \frac{\partial p_r}{\partial x}$$

$$u_r = -\frac{1}{\rho} \int \frac{\partial p_r}{\partial x} dt = -\frac{1}{\rho} \int \frac{\partial p_r}{\partial x} dt = -P_r k_1 \frac{1}{\rho \omega} \sin(t\omega + k_1 x + \varphi_{0r})$$

ここで、 $\frac{\omega}{k_1} = c_1$ とおけば、入射波における粒子速度は、 $u_r(t, x) = \frac{-p_r(t, x)}{\rho_1 c_1}$ であり、

$p_i + p_r = p_t$ より、 $\rho_1 c_1 (u_i - u_r) = \rho_2 c_2 u_t = \rho_2 c_2 (u_i + u_r)$ 、となるので、

$$\text{粒子速度の反射率: } \frac{u_r}{u_i} = \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}$$

$u_i + u_r = u_t$ に注意すれば、

$$\text{粒子速度の透過率: } \frac{u_t}{u_i} = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}$$

$$u_i(t, x) = \frac{p_i(t, x)}{\rho_1 c_1}, u_r(t, x) = \frac{-p_r(t, x)}{\rho_1 c_1}, u_t(t, x) = \frac{p_t(t, x)}{\rho_1 c_1} \text{ を代入して}$$

$$\text{音圧の反射率: } \frac{p_r}{p_i} = \frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}$$

$$\text{音圧の透過率: } \frac{p_t}{p_i} = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2}$$

$$\text{音の強さの反射率: } \frac{-p_r u_r}{p_i u_i} = \left(\frac{\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} \right)^2$$

$$\text{音の強さの透過率: } \frac{p_t u_t}{p_i u_i} = \frac{4\rho_1 c_1 \rho_2 c_2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}$$

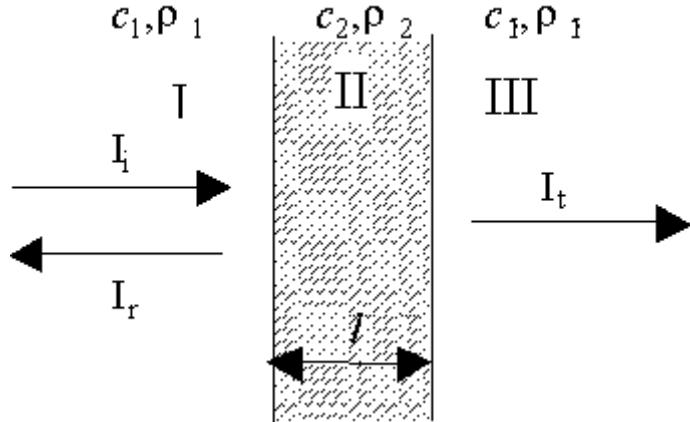
となる。これらの式は音響インピーダンスを用いるとより簡単に表現できる。

音響関連の物理定数は

材料	音速 c (m/s)	密度 ρ (kg/m^3)	インピーダンス 密度 Z (Ns/m^3)
水	1500	1000	1.5×10^6
空気	340	1.2	408
鉄	5950	7860	46.8×10^6

2 媒質間の、音響インピーダンス密度の差が大きいほど、境界面で音波は完全反射し、透過音波の音の強さは 0 に近くなる。例えば、空気／水 境界に音波が入射した場合、殆ど完全反射することがわかる。一方の透過波の音圧は 2 倍、粒子速度は $1/1700$ であり、音圧は入射波の倍になる一方で、粒子速度は殆どゼロになる。この結果、透過波の音の強さは約 $1/1000$ であり音のエネルギーは殆ど透過しない。

鉄板での透過と反射



図のように、媒質Ⅰと、媒質Ⅲの間に、厚さ l の中間層Ⅱが挟まれている。媒質Ⅰに強さ I_i の音波が入射したとき、中間層を通りぬけて、媒質Ⅲに透過する音の強さ I_t を求める式は次のようにになる。

$$\tau = \frac{I_t}{I_i}$$

$$= \frac{4}{(\sqrt{Z_3/Z_1} + \sqrt{Z_1/Z_3})^2 \cos^2(2\pi l/\lambda_2) + (Z_2/\sqrt{Z_1 Z_3} + \sqrt{Z_1 Z_3/Z_2})^2 \sin^2(2\pi l/\lambda_2)}$$

ここで、 $\lambda_2 = c_2/f_2$ である。

媒質Ⅰ、Ⅲは空気、媒質Ⅱが厚さ 5 mm の鉄、周波数が 1 から 10 の超低周波とすれば、
ほぼ、 $\tau = 1$ となる。

したがって、ナセルのふたは超低周波を考えるときには無いものとして考えればよい。

結論は、塔がナセルの分だけ長くなったとして扱って、口が開いていると思えばよいのである。

閉管の開いているほうに、振動体をおいてみると、管の長さが、 $80+10=90\text{m}$ となって、 $4*90=360\text{m}$ の波長を持つ振動と共に鳴る。約 1Hz の振動です。

8. 風車

8.1 風車の仕組み

8.1.1 風車が回る原理

NeoMag 様の HP より

1. 風車が回る原理

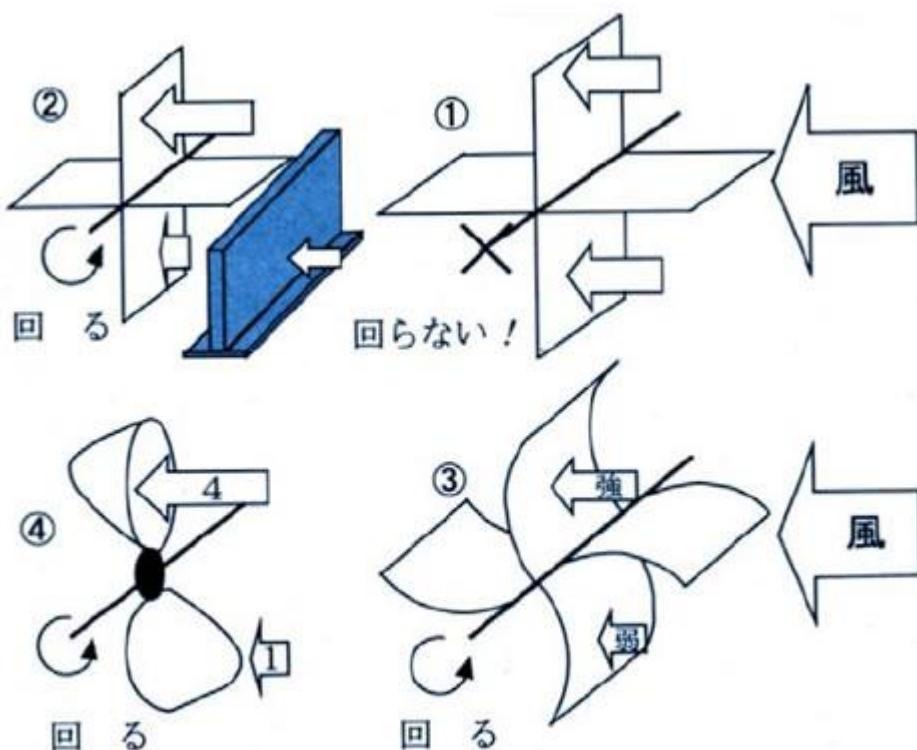
風車の動作については、先月号で述べたように抗力形と揚力形があり、それぞれ風エネルギーを機械(回転)力に変える方法が異なります。

風の力をどのように使って風車は回るのか、その1つは風が物に当たることによって、押す力があり、2つ目は持ち上げる力があります。風車はこの2つの力のいずれかを使います。まずこの押す力を抗力といい、抗力によってどのように風車が回るか、次図をもとに考えてみましょう。

(1-1) 抗力で回る風車

(1)のような十字に張った板の中心に回転できる軸(棒)のある構造を考えます。

この場合は上下の板(以下は翼と呼ぶ)を押す力が同じになってしまい、回ることができませんが、(2)のように下側のみの風をついたてなどでさえぎると、風の押す力に差ができる、矢印の方向に回り始めます。次に少し翼の形を改良した(3)の場合は、風に向かって凹の形をした上側の翼に受ける力の方が、下側の風に向かって凸の形をした翼より、押す力が大きくなり矢印の方向に回ります。さらに、(4)は少し加工して翼の形をお椀の形にした場合であり、この形になると風が当たる方向でその押す力は、4倍程度の差が生じるので、やはり矢印の方向に回ることが分かります。



抗力で回る風車

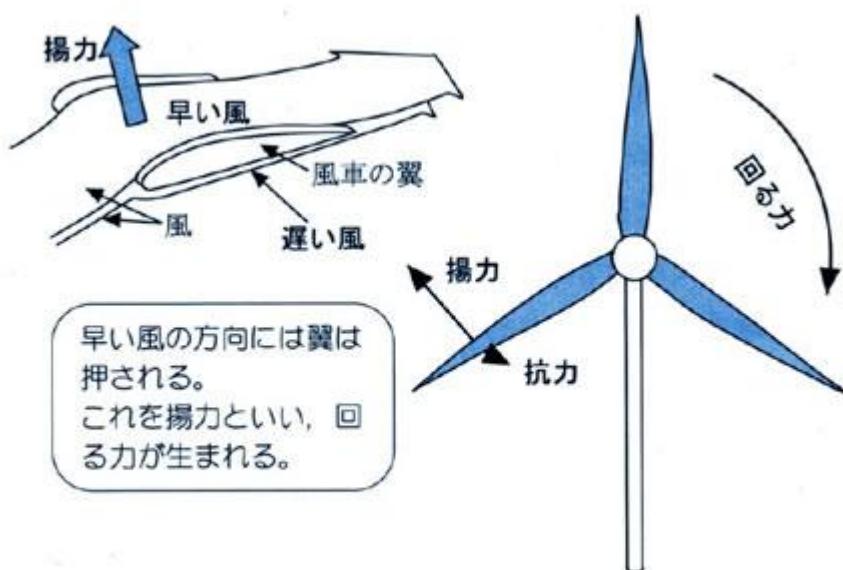
このように、風が風車の翼を押しながら通過してゆき、風車を回すわけですが、ここで注意する点は、翼の動く(移動する)速さは風の速さより速くなることはないということです。したがって、抗力で回る風車は低速形であり、且つ、弱い風で回り始め、軸を回す力(トルクと呼ぶ)が大きな風車となり、用途も重いものをゆっくり回す仕事に向いています。

(1-2) 揚力で回る風車

次に持ち上げる力を揚力といい、この力で風車が回る仕組みを次図で見てみましょう。

風車の羽根を翼と呼び、図の左上のように、翼にある方向から風が当たると、その風の流れる速さが上と下では異なります。この場合に早く流れる風の圧力が遅く流れる風の圧力よりは小さくなる(これは“エネルギー保存則”と呼ばれる)結果、翼を矢印の方向に持ち上げる力が生じます。飛行機などが浮かび上がって飛ぶことができるのもこの力によるもので、これを揚力といいます。

ここでは、風車の回り形には 2 つの方式のあることを知っておいていただきたいと思います。風車の翼の片方は、回転軸に固定されているために、図中の右のように回転する力となります。このような仕組みで回る風車を揚力形風車といいます。この揚力は風の進む速さに比べて数倍から 10 倍以上の速さで翼を回すことができるために、揚力形風車は高速で回ります。回り始める力は弱いのですが、高速で回るので出力(トルク×回転数)も大きく、今日の風力発電に多く用いられています。

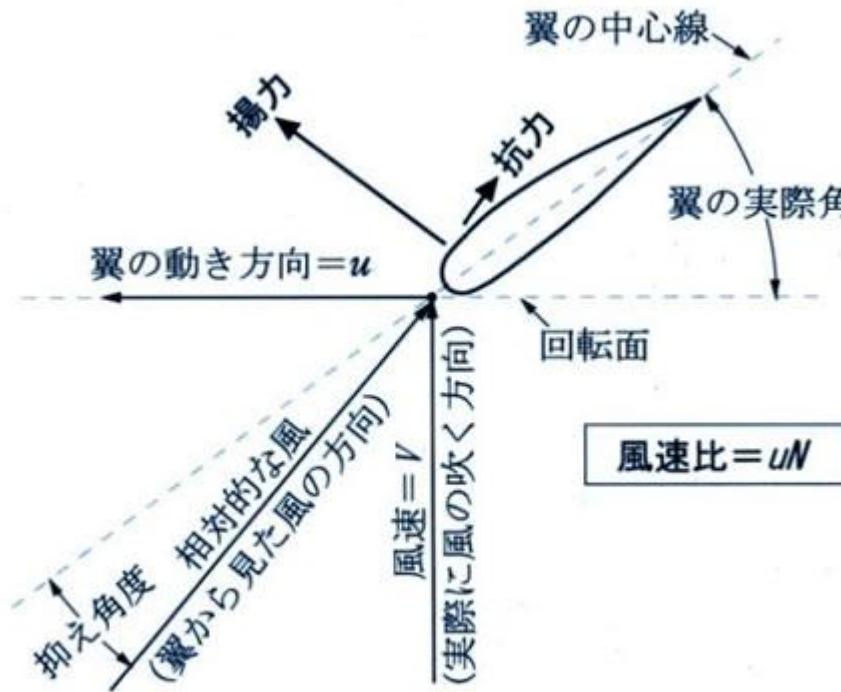


揚力で回る風車

揚力形プロペラ風車の場合を少し詳しく考えてみると、次図になります。回転するローター(翼が組み合わされて回る構造)を考えると、水平軸では風車は回転していても、中央(hub : ハブ)に近いほど進む速さは遅く、先端に行くに従ってその移動する速さは大きくなることが理解できると思います。これは各半径で進む速度(周速度)が異なるからです。したがって、風車は正面から風を受けていますが、回転している翼から見れば次図のように翼の動く方向の速度と、正面から受ける風の速度の合成(ベクトル和)の方向から吹いてくる相対的な方向の風を受けていることになります。その結果、ハブに近い翼はピッチが大きく、翼先端方向に進むに従ってピッチは小さくなっています。受ける風速も絶えず変化しますので、揚力を最大にするためには、風速や回転数でピッチを変化させ運転することが必要であることがわかると思います。

回転力と回転数に対して最適ひねり角があることが予測できます。また、羽根の断面、すなわち翼型も飛行機のプロペラと同様に風車の性能に大きな関係があるといわれています、実験の結果では、前面のひねり角ほ

ど大きな関係はなさそうです。



回転する翼と相対的な風

回転時に空気抵抗の少ない流線形であるならば、実際には問題がないようです。風車の出力は、風車の直径の 2 乗に比例し、風速の 3 乗に比例するといわれます。そして、回転数は直径が大きくなると少なくなります。このように、出力と回転数はプロペラの長さが関係してくるので、目的に応じて設計しなければなりません。風車の羽根枚数と回転数や出力との関係は、羽根枚数を多くすると回転力は大きくなりますが、回転数は少なくなります。同様に、プロペラの幅を増すと回転力は大きくすることができますが回転数は小さくなります。これも最適の値が存在します。手作りという立場から考えれば、プロペラ形風車では 2 枚羽根のものが作りやすいといえます。

2. 風車の全体構造と内部構造

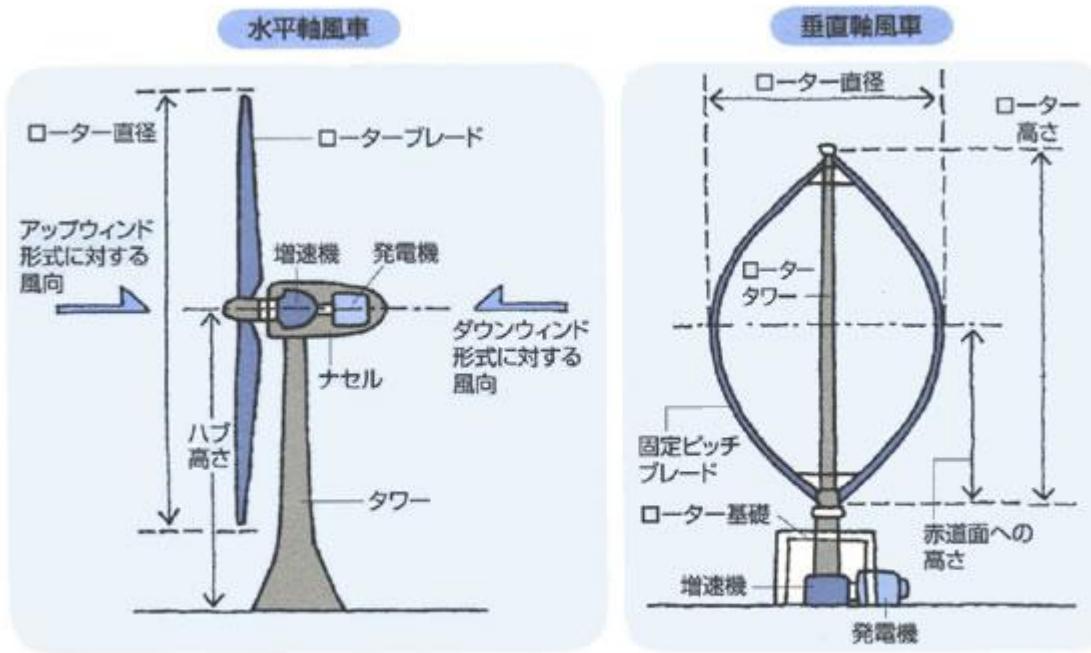
(2-1) 全体構造

風力発電の風車で現在圧倒的に多いのは 3 枚ブレード(羽根、翼)のプロペラ形で、高いタワーの上にナセルと呼ぶ大きな箱が載っていてその先にプロペラ形のローターが付いています。このナセルの中に発電機や増速機さらには変圧器など重要な要素が入っています。ナセルとタワーの間には風向制御のための歯車が付いていて、風向に応じてナセル全体を回転させて風車回転面を風の方向に向けるようにしています。また、風の強さに応じて風車ブレードの角度を変化させる、可変ピッチ機構も組み込まれています。

さらに、どのような発電機を使うのかも重要な問題です。現在一番多く用いられているのは風車の回転数を増速歯車で 1500 回転や 1800 回転に高めて誘導発電機を回す方式です。増速機で回転を上げないで風車の回転を直接に多極の同期発電機に伝える風力発電機もあります。この方が部品点数も少なく、故障の原因になりやすい増速機を除くことができる利点がありますが、大直径で重い発電機になることから現在ではまだコスト高になります。

一方、現在は水平軸のプロペラ形が多く用いられていますが、垂直軸のダリウス形風車などもメカニズムが簡単で部品点数も少なく、重量部分は地上近くに設置できて安定性もあります。また、何と言っても方位制御

を必要としないことから、風向変動の大きなところでは将来性があると言えます。



代表的な風力発電機の全体構造

(2-2) 内部構造

次上図は大型風力発電装置でもっとも一般的な、3枚羽根のプロペラ形風車のナセルの内部構造図を、また、次下図は垂直軸ダリウス形風車の内部構造図を示しています。

ここでは各構成要素について簡単に説明しましょう。

(1)タワー：高さ 50~100m くらいが普通です。高い位置では地表近くに比べて、強く乱れのない風が吹きます。タワーの内部は、発電した電気を送る電線や、ナセルに上がるためのはしごや簡易エレベーターが付けられています。

(2)ナセル：増速機や発電機など、風車の本体を納めておく場所で、防水や防音の役目も果たします。メンテナンスのため人の入れるスペースが設けられています。

(3)ブレード：羽根は軽く作る必要があるため、GFRP（ガラス繊維強化プラスチック）を用い、内部は空洞で微風から回転を開始し、台風のような強風にも耐えられるようになっています。風車の直径が大きくなるほど、回転は遅くなります。

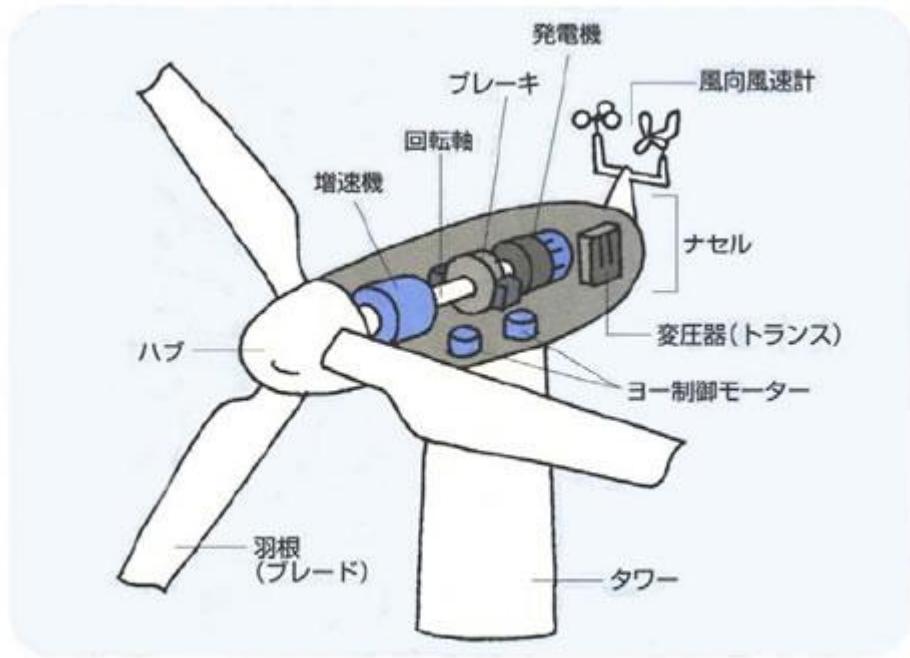
(4)ハブ：ブレードを取り付けている部分で、可変ピッチ方式の風車では、風に対するブレードの角度を調整するための装置がこの中に入っています。

(5)増速機：風車の回転を発電機が必要とする高い回転数まで高める役目をします。増速機を持たず、多極の発電機を風車のゆっくりした回転で直接駆動するダイレクトドライブ方式もあります。

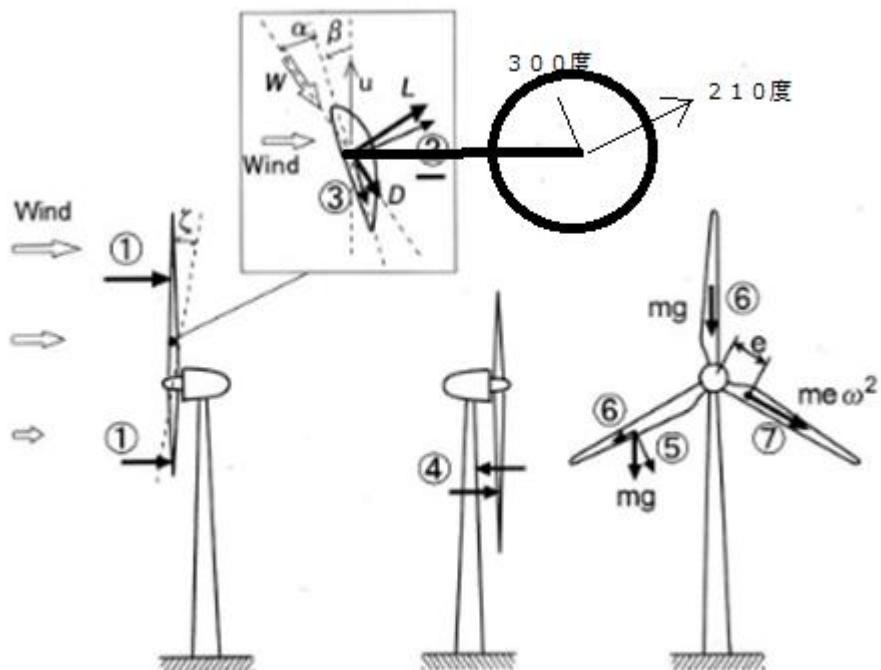
(6)発電機：大型風車では出力数百 kW から 3000kW くらいまでのものが付けられ、1基の大型風車で数百軒から2千軒分の電力を生み出せます。

(7)ヨー制御モーター：ナセルとタワーの取り付け部分に複数個ついています。風車の回転面を常に風の方向に向けるために、ナセルの上の風向計で風の方向を検知し、この制御モーターでナセルごと首を振るようにしています。

(8)制御装置：風速や風向にあわせて風車の運転方法をピッチ制御や発電機や制御モーターに指示するコンピュータです。



プロペラ形風車の内部構造



停止状態から回転を開始する場合には、ブレードの角度を変えて、揚力が回転方向に向いていますが、定常運転では、発電量を安定させるために、ブレードの角度を変えて、揚力の回転方向の成分を減らします。そのときは、揚力ベクトル L が 210 度の方向を向きます。

8.1.2 揚力について

東京大学、土屋研究室のHPでの鈴木真二氏による説明は次のものです。

揚力はなぜ発生するのか

その1

揚力の誤った説明

飛行機は翼が作る揚力と呼ばれる力で空へ上昇することができる。揚力はなぜ発生するのか。そしてジャンボジェットのような大きな飛行機を持ち上げる力はどこから得られているのか。多くの人が飛行機に関して抱く最初の疑問点であろう。いろいろ説明がなされているが、次のようなものを見た方も多いと思う。

「飛行機の翼の断面（翼型という）は図1のように上に反った形状をなしている。翼型に当たった流れは、上面と下面に分かれ。上面は大きな反りがあるので、下面をよりも翼後端までの距離が長い。翼後端で上下の流れが一致するには、上面の流れは下面の流れよりも速くなくてはならない。速い流れの圧力はベルヌーイの法則によって低くなる。上面の圧力が下面の圧力よりも低いので、翼は上に持ち上げられる。」。

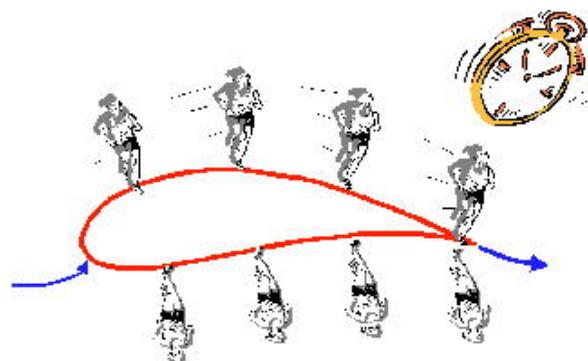


図1 間違った揚力の説明

巧妙な説明だが、残念ながら間違っているところがある。「ベルヌーイの定理」とは、流速と圧力の関係を決める重要な定理である。それ自体に誤りがあるのではない。問題は、「翼後端で上下の流れが同時に再会する」というところである。同時に合流しなくてはならない理由はどこにもない。風洞で流れの様子を観察すると、上面の流れは下面の流れよりも速く流れさってしまうのが分かる。

空気の重さ

そもそも空気の存在を正しく認識するのは難しい。「空」とは地面の上の何もない所という意味だから、「空虚」「空白」などと「空」は何もないことに使われている。だが、実際には重さが存在する。空気の重さに関してクイズを出してみよう。

「問題1：1メートル立方の空気の重さはどれに近いか？」

1. 1円玉ひとつ
2. 鉛筆1本
3. 水の入ったペットボトル1本

答えは3、およそ1.2 kgである。そんなに重いのかと思ったかたも多いのではないか。そんな重さを感じないのか。それは、我々が空気のなかで生活しているからである。ちょうど水中で水の重さを感じ難いようにある。ビンに水を詰めると重くなる。ところが水中にそのビンを入れると重さを感じない。それはビンに浮力が働くからである。これは「アルキメデスの原理」である。物体が流体中で排除した流体の重さだけ浮力を受ける、というものだ。空中でも同じように浮力が働く。空中で空気の重さを感じないのはそのためだ。

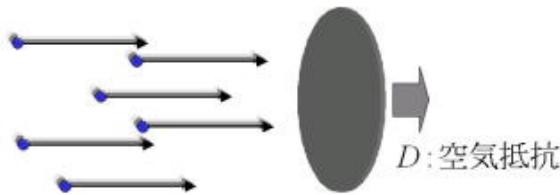
水中で水の重さを感じるとしたら、それは、水中を動く時、または、流れる水中にいる時である。水の重さは1立方メートルあたり1トンである。水流の勢いは洪水の例を見るまでもなく凄まじい。空気は軽いとはいえ、1立方メートルあたり約1キログラムあるからそれが流れると、つまり風がおきると大きな力を受ける。

これは簡単に実験できる。大きなビニールのゴミ袋に空気を詰めてみよう。浮力が働くのでゴミ袋は空気を詰めても重くはない。ところが、空気は1リットルあたり約1グラムの重さがある。だから、空気を詰めた大きなゴミ袋をぶつけるとそこそこの衝撃となる。

もう一つの間違った揚力の説明

走行中の車の窓から手を出し、手のひらを水平から少し傾けると気流の圧力を受け、少し上に持ちあげられる。重さのある空気がぶつかった反作用である。この力が揚力の要因であるとする説明に出会うことがある。流れに傾けて板のような物体をおけば確かに反作用で上向きの力が発生する。ただ、その力は揚力に比べるとずっと小さい。

流れがぶつかった際に発生する反作用で力が発生することを最初に数学的に説明したのはアイザック・ニュートンであった。ニュートンは図2のように、空気（一般には流体）を小さな粒子の集まりと考え、その粒子が物体にあたることで力を及ぼすと考えた。流体の速度をVとし、流体の密度をρとし、物体を面積Sの円盤としよう。一秒間に物体に衝突する流体の質量は空気密度と速度と円盤の面積の積であり、衝突によって速度が0になるとすると、1秒間における運動量はさらに速度を掛けた大きさになる。単位時間当たりの運動量の変化が物体に作用する力となるので、物体には図2のような力が加わる。これは流体が空気の場合には、空気抵抗となる。



$$D = \rho V^2 S$$

ρ : 空気密度、 V : 速度、 S : 面積

図2 ニュートンの考えた流体力の計算法

空気抵抗が流速の2乗に比例し、物体の面積にも比例するという結果は定性的には正しい。ニュートンは1687年に、大きさの異なる球をセントポール寺院のドームから落として大きさによる抵抗の違いを確認したという。物体の落下速度は物体の質量にはよらず一定であるという、ガリレオの主張が崩されたのだ。物体の形や大きさが変われば、空気抵抗が変化するので、実際には、落下速度も変化するのが正しい解釈である。

流れに置かれた板が傾きを持てば、衝撃力は板に垂直に作用する。流れに垂直な力を揚力、平行な力を抵抗と定義するから、確かに揚力が発生することになる。ニュートンの時代に、飛行機を研究した人はいなかつただろうから、ニュートンの理論で飛行機が設計されることもなかった。ニュートンの示した流体抵抗の算出方法は、当時の軍艦の設計には、役立ったと思われる。ただし、ニュートンがこの理論を構築したのは、宇宙の惑星の運動を解析するためであった。当時、宇宙は均質な物質で満たされていると考えられていた。ニュートンは万有引力の法則によって惑星の運動が説明できることを示した。惑星の運動が力学法則に支配されていることを明らかにしたのだ。ただし、宇宙が流体物質に満たされているとすると、抵抗が生じ、時間がたつと全ての惑星は太陽に吸い寄せられてしまう。そうはないことから、宇宙は真空であるとニュートンは主張した。

ニュートンの空力理論

ニュートンの方法によって飛行機の揚力を実際に見積もってみよう。たとえば、ジャンボジェットは、面積約500平方メートルの主翼を持つ。低空を秒速120メートル（時速432キロメートル）で飛行した場合に発生する揚力と抵抗の大きさを、ニュートンの方法で見積もってみたい。ニュートンの方法では、傾いた主翼にあたる流れを主翼に垂直な方向と、平行な方向に分離する。平板に力を及ぼすのは、主翼の垂直な成分の運動量の変化である。その力の流れに垂直な成分が揚力であり、平行な成分が抵抗となる。それらの大きさは、主翼の傾き（迎角という）に関係し、図1のようにグラフに描くことができる。最大の揚力は迎角が55度あたりで得られるが、それでも300トン程度であり、400トン近くある最大離陸重量を支えることができない。しかも、その時の空気抵抗は500トン近く出てしまう。これでは飛行機として成立するわけがない。ジャンボジェットのエンジンは1台あたり約27トンの推力だから4台でも108トンしか出ないからだ。

（注：図1の縦軸には揚力と抵抗を無次元化した係数も表示している。揚力や抵抗は飛行速度や翼の大きさ、空気密度によって変化する。こうした条件によって異なるように無次元化を行う。揚力や抵抗のような空気力は空気密度に流速の二乗を掛け2で割った動圧と翼面積の積で力を割って無次元化する。詳しくは図2を参照のこと。）

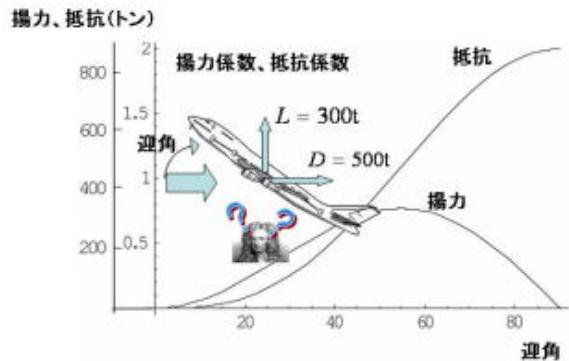


図1 間違った揚力の説明

揚力300トンの無次元化

- 1) 力をニュートンの単位で表示する。
1ニュートンは1kgに重力加速度を掛けた力。
- 2) 力を動圧と翼面積の積で割る。

$$C_L = \frac{L}{(1/2)\rho V^2 S} = \frac{300000 \times 9.8}{(1/2) \times 1.2 \times 120^2 \times 500} \approx 0.68$$

図2 揚力の無次元化の例

さすがのニュートンも揚力を正確に計算することはできなかった。ニュートンの方法で見積もると、飛行機には離陸重量を上回る推力を出せるエンジンが必要ということになるし、揚力も小さい。19世紀になっても飛行機は成立しないと判断されたていたのは、この計算結果にも原因があったようだ。しかし、意外にも、その計算法は20世紀後半になってから再登場することになった。

空気の粒子が物体にあたり、その反力を揚力や抵抗が発生するというニュートンの考えは、飛行速度がマッハ数の5倍以上にもなる極超音速の飛行では有効であることが分かった。

マッハ数とは、音の伝わる速度、つまり音速との比で速度を表す方法である。音速は気温によって変化するが、摂氏15度の常温では秒速330メートル（時速1190キロメートル）である。音速の5倍以上の極超音速で飛行できる航空機はNASAの実験機しか存在しないが、宇宙船やスペースシャトルなどは宇宙から帰還する際に、超音速飛行で飛行する（というか落下する）。宇宙船やスペースシャトルの地球周回軌道速度はマッハ2.0以上である。ただし、ほとんど真空中での飛行であるから空気力は発生しない。地球に落ちてこないのは、遠心力が重力と釣り合っているからである。地球へ帰還を開始するには、逆噴射で減速し、遠心力を小さくすることで落下する。その途中で、空気が濃くなり始め、揚力と抵抗が発生する。そのときの空気力は、空気の粒子が機体に当たるとして計算するニュートンの方法で、見積もることができる。ニュートン先生もこんなところで自分の研究が活かされたとは思わなかったに違いない。

（次回に続く）

鈴木真二（東京大学航空宇宙工学専攻）

鈴木氏が説明する第一の誤解の例

巧妙な説明だが、残念ながら間違っているところがある。「ベルヌーイの定理」とは、流速と圧力の関係を決める重要な定理である。それ自体に誤りがあるのではない。問題は、「翼後端で上下の流れが同時に再会する」というところである。同時に合流しなくてはならない理由はどこにもない。風洞で流れの様子を観察すると、上面の流れは下面の流れよりも速く流れさってしまうのが分かる。

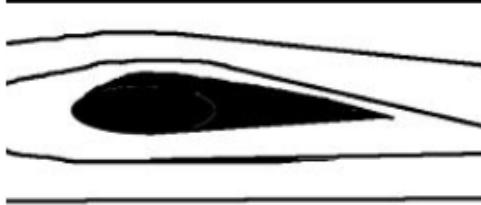
間違っている例は、次のようなものです。

2. 揚力のしくみ

(1) 翼

翼の断面図は、上面は緩やかなカーブ、下面是平らなラインになっている。ここで重要なことは、上面の方がカーブしている分下面より距離が長いことだ（図1）。

（図1）



(2) 揚力の発生

図1のような翼を流体の中に置くと、※コアンダ効果により翼に沿って流体が流れる。上面と下面に分かれた流体は、同じ時間をかけて翼の表面を通過し、後方で同時に合流する。上面は下面よりも距離が長いので、上面を流れる流体の方が下面を流れる流体よりもスピードが速くなる。すると※ベルヌーイの定理により、上面の流体の圧力が低くなる。その圧力差によって翼を上方に引き上げようとする力が生じる（図2）。この力が揚力である。

問題点は、上下に分かれた流れが同時に再会する理由がない。実験でも、同時に再会しないことが分かる。

次のような見解もありました。

揚力の説明にペルヌーイの定理や循環、クッタの条件のような難しい用語は必要ありません。

揚力が発生する仕組みとても単純です。インターネットには間違った解説がたくさん出回っています。惑わされないようしっかり学んでいきましょう。

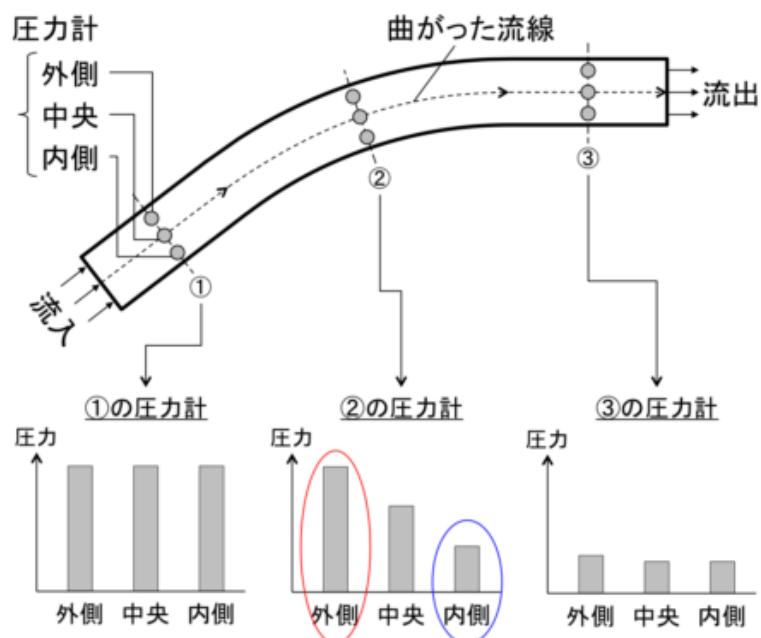
とあって、次の実験結果の考察から始まっている。

試験の様子

圧力計測の様子



測定実験の解説

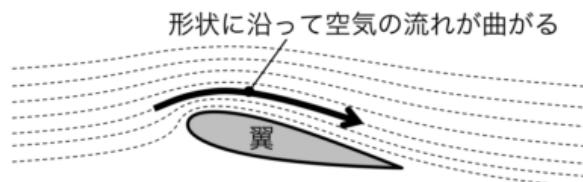


試験では、①・②・③の各計測場所で外側・中央・内側の3点の圧力が計測されています。

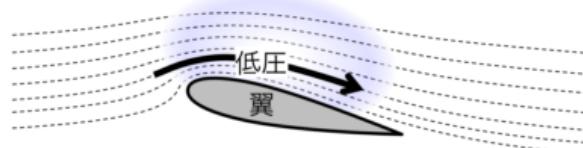
流れの曲がっている②では、曲がった流線の外側は圧力が高く内側は圧力が低いです。

翼の上面・下面の圧力差が発生する仕組み

翼上面の空気の流れ

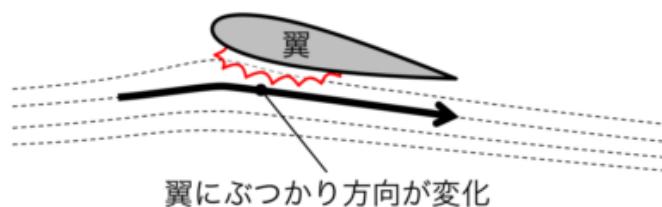


翼上面では、空気の流れが下向きに曲げられます。

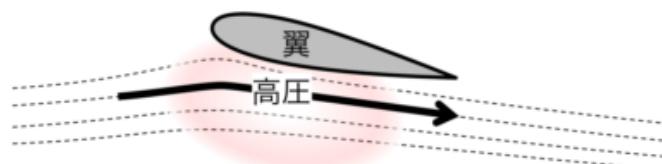


翼上面は曲がった流れの内側にあるので、翼上面では圧力が**低下**します。

翼下面の空気の流れ

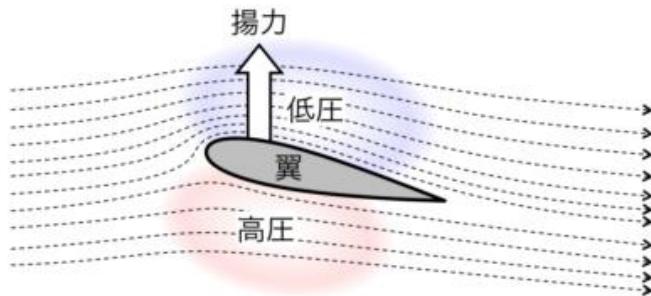


一方、翼の下面では空気は翼にぶつかって空気の流れが下向きに変わります。



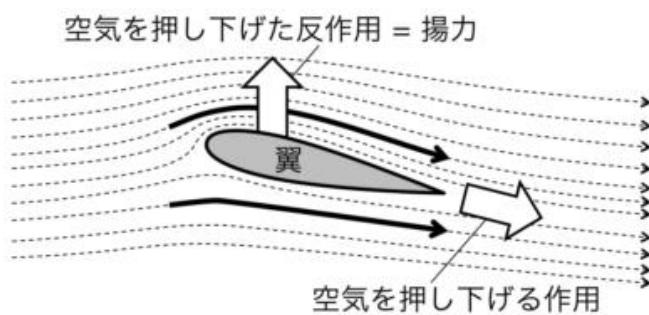
翼下面是曲がった流れの外側にあるので、翼下面では圧力が**上昇**します。

翼上面・下面の圧力差＝揚力



空気の流れが下向きに曲がることで翼上面は圧力が低下し翼下面是圧力が上昇します。このように空気の流れを曲げた反作用は翼上面・下面の圧力差として翼に作用します。

まとめ



揚力は、翼が空気の流れを下向きに曲げたことによる反作用で発生します。また空気の流れを下向きに曲げると、翼上面と下面に圧力差が発生します。

Q 空気を押し下げた運動量を測っても、翼上面・下面の圧力差を測っても揚力は同じです。

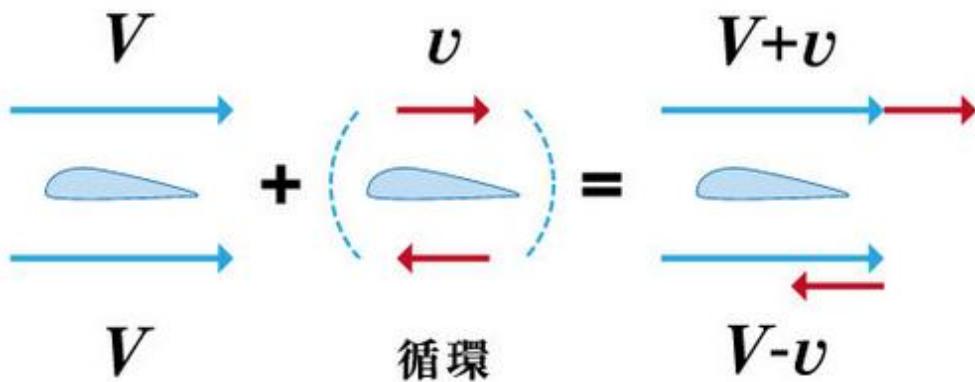
この説明には、循環の概念が見当たりません。

揚力を広くとらえて、翼を上に押し上げる力と考えれば、いろいろな説明が可能となるのですが、とにかく、ジャンボ機が離陸できるような揚力を見つけることが必要です。

8.1.3 流体力学より

ここでは、

循環によって、翼の上の方が流速が速くなり、これが翼の上下に圧力差を生む。翼の上の方が圧力が低いので、上に引き上げられる力が発生する。ベルヌーイの定理ですね。これが揚力です。



という説明について、循環に注意しながら考えてみます。

なお、ベルヌーイの定理は以下の式です。

$$P + \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g z = \text{一定}$$

簡単に言えば、「流体の速度が増加すると圧力が下がること」を示しています。

いくつか準備をします。

保存力場 \mathbf{F} のポテンシャル

有限変位、 $P \rightarrow Q$ に対して、力のなす仕事 W が始点と終点だけで決まり、経路曲線 C によらない力を保存力という。

保存力場 $F(r)$ が定義された領域 D の中の任意の 2 点、 P, Q を結ぶ 2 本の滑らかな曲線を C_1, C_2 とする。

保存力場の定義より、

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_{C_2} F \cdot dr$$

となり、積分路の向きを変えた計算で、

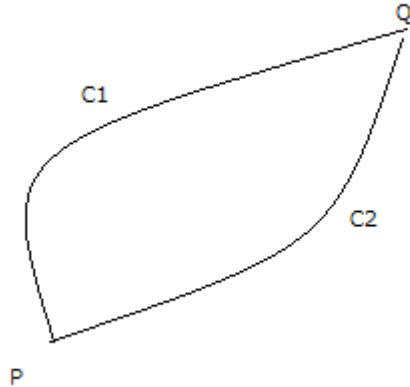
$$\int_{C_1} F \cdot dr + \int_{-C_2} F \cdot dr = 0$$

となる。

これは、閉曲線に沿っての積分を考えると、保存力のなす仕事が 0 であることを意味している。

$$\oint F \cdot dr = 0$$

となる。逆に、上の式が成立すれば、F は保存力場である。



領域Dにおいて、2点 P_0, P を考える。 P_0 を固定すると、仕事 $W(P_0 \rightarrow P)$ の値は $W(P)$ と書ける。保存力場のポテンシャル $U(P)$ を

$$U(P) = -W(P) = - \int_{P_0}^P F \cdot dr$$

で、定義する。

このとき、変位 $P \rightarrow Q$ に対応する仕事は

$$\int_P^Q F \cdot dr = \int_{P_0}^Q F \cdot dr - \int_{P_0}^P F \cdot dr = U(P) - U(Q)$$

となる。この時、Q が P に十分近く、 $Q(r+dr)$ と書ける場合には、

$$\begin{aligned} \int_P^Q F \cdot dr &= \int_P^Q (X dx + Y dy + Z dz) = -(U(Q) - U(P)) \\ &= - \int_P^Q dU = - \int_P^Q \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) \end{aligned}$$

となるので、

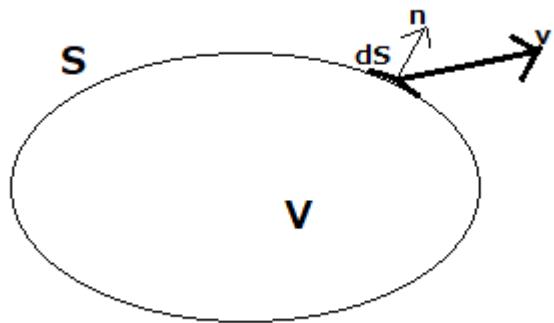
$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, Z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

が成立する。

すなわち、保存力の直行成分は、ポテンシャル U の負の勾配として表され、

$$F = -\text{grad}U = -\nabla U$$

と書ける。



流れの中に、空間に固定した閉曲面 S を考える。 S によって囲まれた領域 V について質量保存の法則を考える。任意の時刻において、 V に含まれる質量は、密度を ρ とすると、

$$\iiint_V \rho dV$$

と書ける。

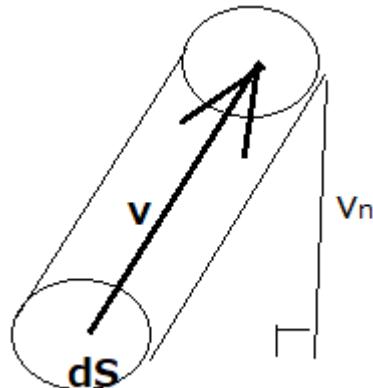
単位時間当たりの質量の変化は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV$$

となる。

この変化は、表面 S を通って流体が流れ込んだり、流れ出したりすることによって起こる。

表面 S の微小面積 dS を通って流出する質量を考える。



上の図の傾いた円柱の高さは、 v の法線方向の成分 v_n であり、単位時間当たりに流出する質量は、 $\rho v_n dS$ であり、単位時間あたりに全表面を通って流出する総量は、

$$\iint_S \rho v_n dS$$

この符号を変えたものが流入量 ($v_n = v \cdot n$ が負になる。) なので、

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = - \iint_S \rho v_n dS = - \iint_S (\rho v) \cdot n dS = - \iint_S (\rho v)_n dS$$

後ほど示す式

$$\iiint_V \operatorname{div} A dV = \iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) dV = \iint_S (A_1 n_1 + A_2 n_2 + A_3 n_3) ds = \iint_S (A \cdot n) ds == \iint_S (A_n) ds$$

を使えば、

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = - \iint_S (\rho v)_n dS = - \iiint_V \operatorname{div}(\rho v) dV$$

V の範囲を狭くして考えると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0$$

となる。これが、Euler の連続方程式です。

さらに、成分に関しての積の微分を考えれば、

$$\operatorname{div}(\rho v) = \rho \operatorname{div}(v) + v \cdot \operatorname{grad}(\rho)$$

となることが分かるので、

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \operatorname{grad}(\rho) \right) + \rho \operatorname{div}(v) = 0$$

となり、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \operatorname{grad}(\rho) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(v_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \right) = \frac{D\rho}{Dt}$$

と書けば、

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(v) = 0$$

とも書ける。

縮まない場合は、密度が時間的にも場所的にも一定なので、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(v_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \right) = \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

となり、

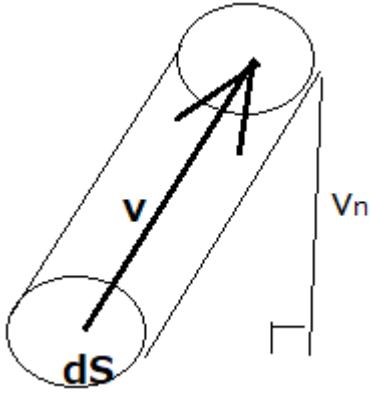
$$\operatorname{div}(v) = 0$$

を得る。

Euler の運動方程式（運動量（mv）の保存）

運動量と角運動量が保存されるとする。さらに流れが定常であるとする。この時 C で囲まれた流れの部分の状態は一定なので、 C を通って流入する運動量は全て物体 B に作用することになる。

次に、流体が流れるときに運動量も流れ出ます。単位面積 dS を通って、速度 v で密度 ρ の流体が流れ出すとする。 dS に対して斜め方法に速度 v で流出したとする。流出した体積は斜めになっている円柱を薄く切って



まっすぐに積みなおしてみれば、体積が $v_n dS$ であることが分かる。 v_n は \mathbf{v} の法線方向の成分。密度が ρ なので質量は $\rho v_n dS$ であり、速度が \mathbf{v} なので、外に出た運動量は $\rho \mathbf{v} v_n dS$ となる。

よって、表面 S を通って、V に流入する運動量は単位時間当たり

$$-\iint_S \rho \mathbf{v} v_n dS$$

となる。

物体 B が持っていた運動量を $m v$ とする。流入した運動量が力 F として δt 秒間作用したとすれば、
 $F = m \alpha$ 、 $\alpha = (v' - v) / \delta t$ より、 $mv' - mv = F \delta t$ となるので、力積の分だけ B の持っている運動量が増加することになる。

領域 V を考える。V の運動量は、 $\iiint_V \rho v dV$ であるから、その単位時間当たりの変化は

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho v dV$$

であり、これは $\delta t \rightarrow 0$ とした時の次の式である。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} (\iiint_{V;(t+\delta t)} \rho v dV - \iiint_{V;(t)} \rho v dV) \\ &= (\iiint_V \rho \frac{1}{\delta t} (v(t + \delta t) - v(t)) dV) \end{aligned}$$

積分記号内の式は、微小体積 ρdV が加速度 $\frac{1}{\delta t} (v(t + \delta t) - v(t))$ を持っていることを意味している。これは力がかかるからで加速度が生じていると考えられる。

よって、積分してすべてを合計した、上の式の値は、V にかかる全ての力の合計です。

内部の微小部分に掛かる力については、単位体積当たりの力を K とすれば、微小体積 ρdV にかかる力は $\rho K dV$ となる。

$$\left(\iiint_{V \text{ (内部)}} \rho \frac{1}{\delta t} (v(t + \delta t) - v(t)) dV \right) = \iiint_{V \text{ (内部)}} \rho K dV$$

(例えば、卵の内部の微小部分に重力による力が加わる。)

物体 B に対しては、その表面（卵の殻）に対して加えられた力も運動量を変化させる要因となる。
V が流体中にあれば、圧力 p は表面の微小部分 dS に対して垂直に働いて、 $-p n dS$ となる。ここで n は外向きの法線なので、外からの圧力は n と方向が逆になるのでマイナスの符号が付く。
これを表面全体に集めて卵の殻に働く圧力の合計を求める

$$-\iint_S pndS$$

になる。

したがって、Vに対して働く外力の全体は、

$$\iiint_V \rho K dV - \iint_S pndS$$

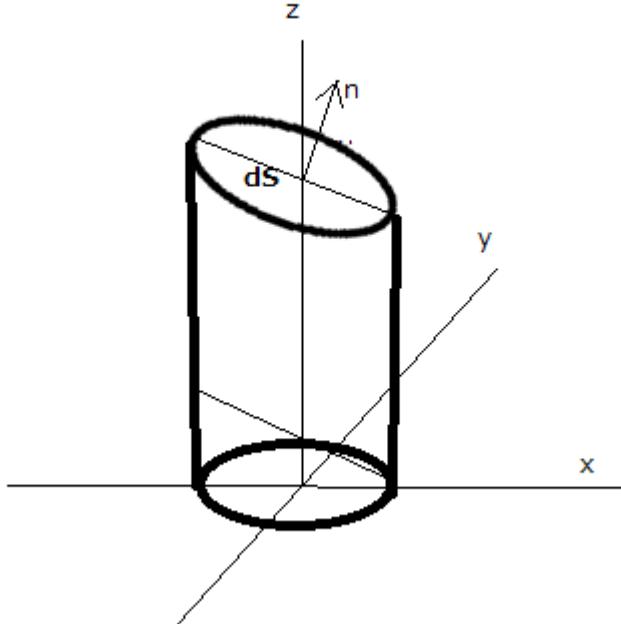
となる。

単位時間に流出する運動量を考えると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho v dV &= \iiint_V \rho K dV - \iint_S pndS - \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_n dS \\ &= \iiint_V \rho K dV - \iint_S (pn + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_n) dS \end{aligned}$$

となる。これが運動量保存の法則を表す式です。

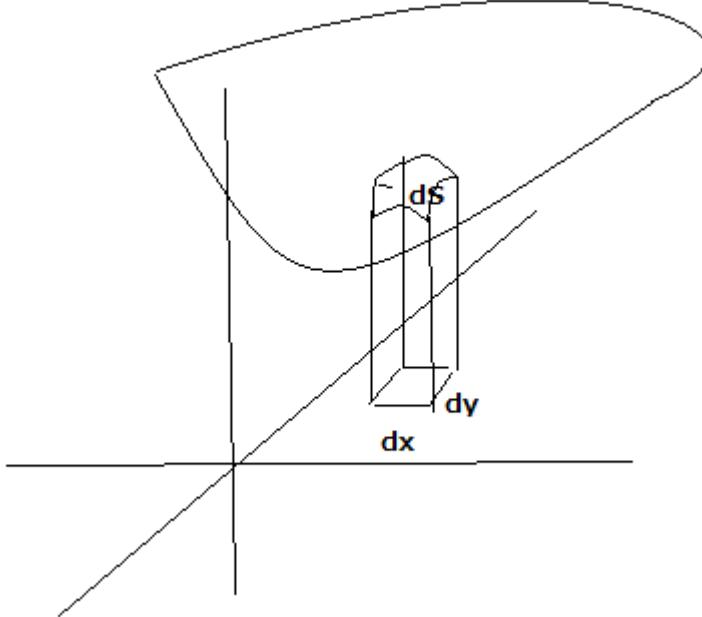
積分をするために、射影を考える。



原点を中心とする円柱を考える。この切り口の面積を dS とする。上の図の楕円の長径の射影が x 軸に重なり、短径の射影が y 軸に重なるとする。 dS に対する法線ベクトルが z 軸となす角を θ とすれば、
長径 * $\cos \theta$ = 円の直径

となるので、面 dS を長径に沿って細く切りその矩形を射影すれば、幅は同じで長さが $\cos \theta$ 倍されるから、
 $dS \cdot \cos \theta$ = 円の面積となる。

上の関係は、 dS が楕円でなくとも成立する。



x y 平面を矩形で細分化する。その一つの面積は $dx \cdot dy$ とする。これを上の伸ばした直方体の曲面による切り口の面積を dS とすれば、 $dS \cdot \cos \theta = dx \cdot dy$ となる。

V が卵の様に膨らんだ曲面 S で覆われているとする。

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial z} dV = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial z} dz dx dy = \iint_{PS} (Q_1 - Q_2) dx dy = \iint_{S1} (Q_1) \cos \theta ds + \iint_{S2} (Q_2) \cos \theta ds = \iint_S (Q) n_3 ds$$

ここで $S1$ は上の面、 $S2$ は下の面、法線が外向きなので、下の面では $\cos \theta$ は負になる。

積分

$$\iint_S (pn + \rho v \cdot n) dS$$

の第 i 成分（第 1 成分は x 成分、第 2 成分は y 成分、第 3 成分は z 成分のことですが、第 1 成分を $x1$ 成分、第 2 成分を $x2$ 成分、第 3 成分を $x3$ 成分と書くことにします。）を計算します。

v_n が v の法線方向の成分であり、 $v_n = v \cdot n = v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3$ であることに注意して、考えれば、

$$\begin{aligned} \iint_S (pn_i + \rho v_i v_n) dS &= \iint_S (pn_i + \rho v_i (v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3)) dS \\ &= \iiint_V \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho v_i v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho v_i v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p \rho v_i v_3}{\partial x_3} \right) dV \end{aligned}$$

第 i 成分を考えた積分の式に、これを代入して、

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho v_i dV = \iiint_V \rho K_i dV - \iiint_V \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho v_i v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho v_i v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p \rho v_i v_3}{\partial x_3} \right) dV$$

を得る。

V が狭い領域ならば、被積分関数はほぼ一定の値を取り、積分値は一定の値 * dV となる。 dV はプラスの値なので、狭い範囲で積分値が 0 ならば、その範囲で被積分関数は 0 となる。

よって、

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = \rho K_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \rho v_i v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \rho v_i v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial p \rho v_i v_3}{\partial x_3}, (i = 1, 2, 3)$$

となり、これが運動量保存の法則を Euler 的に表現した運動方程式です。

補足：

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial z} dV = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial z} dz dx dy = \iint_{PS} (Q_1 - Q_2) dx dy = \iint_{S1} (Q_1) \cos \theta ds + \iint_{S2} (Q_2) \cos \theta ds = \iint_S (Q) n_3 ds$$

より、

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial x_i} dV = \iint_S (Q) n_i ds$$

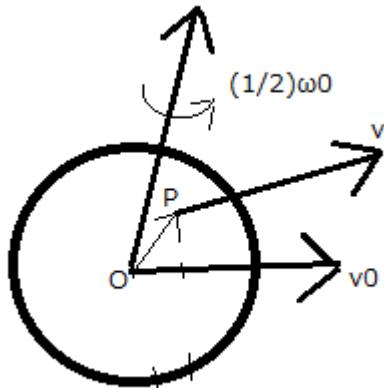
となるので、

$$\iiint_V \operatorname{div} A dV = \iiint_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) dV = \iint_S (A_1 n_1 + A_2 n_2 + A_3 n_3) ds = \iint_S (A \cdot n) ds = \iint_S (A_n) ds$$

$$\iiint_V \operatorname{grad} p dV = \iiint_V \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) dV = \iint_S (pn_1, pn_2, pn_3) ds = \iint_S p n ds$$

も成立する。

流体粒子の運動



流体内の微小な粒に注目して考える。粒の中心 O を原点とする、この中心が速度 v_0 で進むとする。

この粒の点 P の座標を $P(x,y,z)$ として、この点の速度を v とすれば、

$$v = v_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 z + \dots$$

記号を

$$v = (v_1, v_2, v_3)$$

$$r = (x_1, x_2, x_3)$$

さらに、

$$i = (1,0,0), \quad j = (0,1,0), \quad k = (0,0,1)$$

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_0$$

と書けば、

$$\begin{aligned} v &= v_0 \\ &+ a_{11}xi + a_{12}yi + a_{13}zi \\ &+ a_{21}xj + a_{22}yj + a_{23}zj \\ &+ a_{31}xk + a_{32}yk + a_{33}zk \end{aligned}$$

と書けます。

この式は、

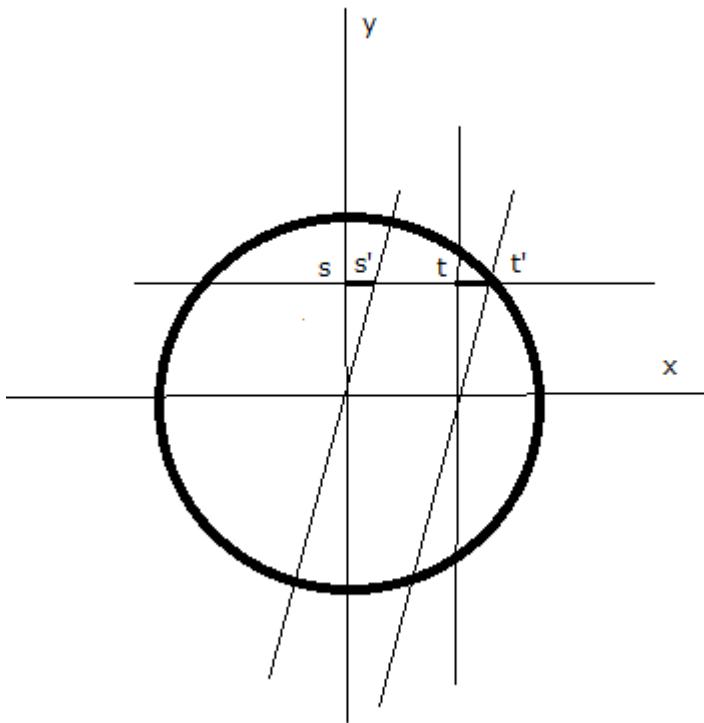
と変更して、 v は v_0 と比較すると、いろいろな速度成分が追加されていることを意味しています。

i は、原点 O における x 軸方向を意味しています。

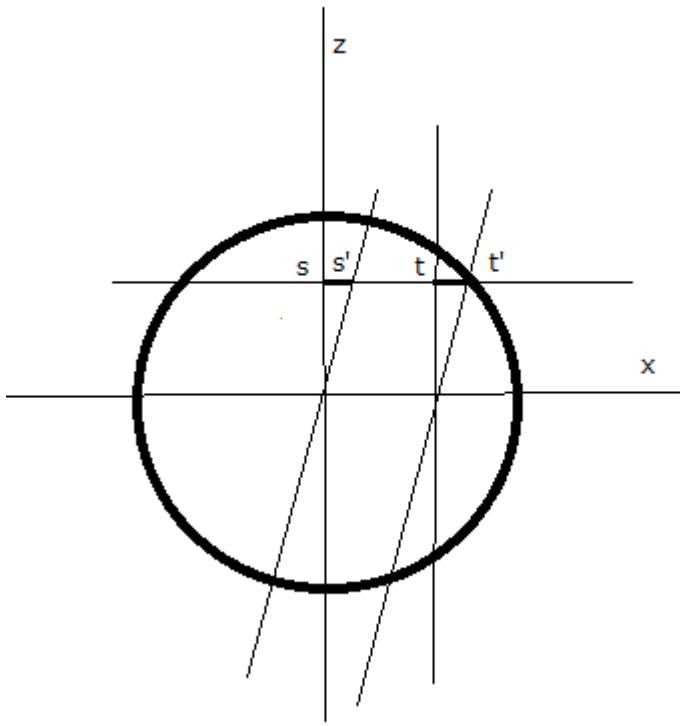
$$a_{11}xi$$

これは、 v_0 に比べて、 x が正の時は、 x 軸方向の速度が $a_{11}x$ だけ増加 (a_{11} が負なら減少) することを意味しています。 $a_{22}yj$ 、 $a_{33}zk$ の意味も同様です。

$a_{12}yi$ については、 i が付いているので、 x 軸方向の速度です。 a_{12} の値は、原点 O での値です。点 P がこの粒の中のどこにあっても、 y 座標が同じならば、 $a_{12}yi$ は同じです。これは同じ y 座標を持つ点の x 軸方向に関する速度成分の増加分が等しい値、 $a_{12}y$ であることを意味しています。下の図のように、 ss' と tt' が同じになるのです。 x 軸よりも下の部分では、 y の値が負になるので、左向きの速度成分が加わることになります。



また、 $a_{13}zi$ についても、y 軸が z 軸に代わるだけのことです。



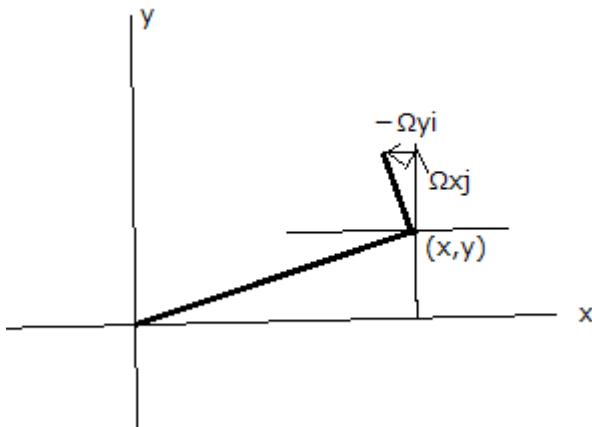
他の、各項に関しても同様に理解できますが、これらの速度変化が、小さな粒の運動としてどのような意味を持っているかは、次の様に考えればよく分かります。

$$\Omega_z = \frac{1}{2}(a_{21} - a_{12}), \gamma_{xy} = (a_{21} + a_{12})$$

と置けば、

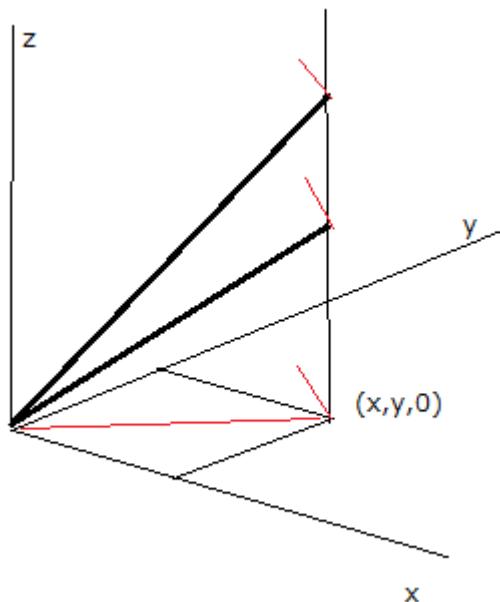
$$a_{12}yi + a_{21}xj = \Omega_z(xj - yi) + \frac{1}{2} \gamma_{xy}(xj + yi)$$

と書けます。



まず、xy 平面で考えると、上の図の 2 つの三角形は相似で、相似比は Ω です。2 本の太い線は直交しています。これは、原点から (x, y) までの長さが同じ場合は、相似比 Ω の小さな三角形が付くので、小さな三角形の斜辺の長さは同じです。これをベクトルの合成と考えれば、元のベクトルが原点を中心にして回転することを意味しています。

さらに、3 次元空間で考えれば、その点の xy 平面への射影が重なるならば、回転が射影によって決まるので、これらの点は、z 軸を中心にして回転することが分かります。



このことから、

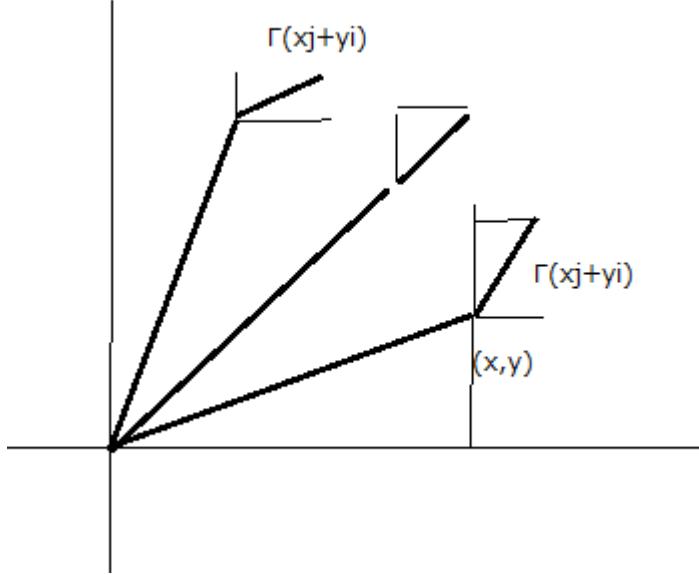
$$\Omega_z(xj - yi)$$

は、z 軸を中心とした回転を意味する項です。

次は、

$$\gamma_{xy}(xj + yi)$$

について考えます。



相似な三角形であることは同じですが、追加されるベクトルの向きは、点の座標 (x,y) によって変わってきます。

上の図を見れば、45度方向に延びてゆくことが分かります。3次元での話は、前と同様です。

これによって、物体が、正方形から菱形に変形することを表すのが

$$\gamma_{xy}(xj + yi)$$

であることが分かります。

さて、 $a_{11}xi = \varepsilon_x xi$ と書けば、

$$\begin{aligned}
 v &= v_0 \\
 &+ a_{11}xi + a_{12}yi + a_{13}zi \\
 &+ a_{21}xj + a_{22}yj + a_{23}zj \\
 &+ a_{31}xk + a_{32}yk + a_{33}zk \\
 &= v_0 \\
 &+ \Omega_x(yk - zj) + \gamma_{yz}(yk + zj) + \varepsilon_x xi \\
 &+ \Omega_y(zk - xk) + \gamma_{zx}(zk + xk) + \varepsilon_y yj \\
 &+ \Omega_z(xj - yi) + \gamma_{xy}(xj + yi) + \varepsilon_z zk
 \end{aligned}$$

ただし、

$$\Omega_x = \frac{1}{2}(a_{32} - a_{23}), \quad \gamma_{yz} = (a_{32} + a_{23})$$

$$\Omega_y = \frac{1}{2}(a_{13} - a_{31}), \quad \gamma_{zx} = (a_{31} + a_{13})$$

となり、運動は、速度 v_0 の併進運動、回転、球が橢円体となるような純粹のずれ運動、軸方向の伸び縮み。を同時にやっていることになる。

渦度 ω

ベクトル場 V から、ベクトル $\omega = \text{rot}V$ を作ります。

$$V = V(u, v, w)$$

とすれば、

$$\omega = \text{rot}V = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$$

となるので、 $\omega = \text{rot}V$ がベクトル場における回転を表していることが分かります。

渦線

$$r = r(x, y, z)$$

が、 $dr = (dx, dy, dz)$ としたときに、

$$dr // \omega$$

が成立するときに、 r による曲線を渦線と言います。

渦なしの流れでは、 $\omega = \text{rot}V$ がベクトル場における回転を表していることから、

$$\text{rot}V = 0$$

が成立します。このとき、ストークスの定理

$$\oint_C X \cdot dx = \iint_S n \cdot \text{rot}X dS$$

より、

$$\oint_C X \cdot dx = 0$$

となり、2点間の積分が経路に無関係となり、あとで述べる“保存力場 F のポテンシャル”の中身と同様となり、速度ベクトル v は

$$v = \text{grad}\Phi$$

すなわち、

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

となる、 Φ が存在する。 $(\Phi = -U$ と置き換える)

等ポテンシャル面

$$\Phi(x, y, z) = \text{const}$$

に対する法線ベクトル $n(l, m, n)$ とする。

等ポテンシャル面 S の方程式を、 $\Phi(x, y, z) = c$ とする。 S に含まれる曲線 C のパラメータ表示を、

$$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

とする。 $t = 0$ に対応する点を P とすれば、

$$\left[\frac{dr}{dt} \right]_{t=0} = u$$

は、PにおけるCの接戦ベクトルに平行である。仮定によりCはSに含まれるから、

$$\Phi(x(t), y(t), z(t)) = c$$

である。

これをtで微分すれば、

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{dr}{dt} \cdot (\text{grad}\Phi)$$

となります。

これから、Cの接線ベクトルと、 $\text{grad}\Phi$ は直行します。接線ベクトルの方向は任意なので、 $\text{grad}\Phi$ はPを含む平面に垂直となり、 $\text{grad}\Phi$ は法線ベクトルnと平行になります。

$n/\text{grad}\Phi$ より、 $n/\parallel v$

が成立します。よって、流線は、等ポテンシャル面に直交します。

速度の大きさを、 $q = |v|$ とすれば、

$$v = q n$$

となります。

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial n} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(r + tn) - \Phi(r)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(r + t(l, m, n)) - \Phi(r)}{t} \\ &= \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{tl}{t} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{tm}{t} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \frac{tn}{t} = l \frac{\partial\Phi}{\partial x} + m \frac{\partial\Phi}{\partial y} + n \frac{\partial\Phi}{\partial z} = n \cdot \text{grad}\Phi = n \cdot v = q \end{aligned}$$

を得る。

運動方程式の第一積分

連続の方程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0$$

は、

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho v) = -\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho v_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho v_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho v_3)\right)$$

と書ける。また、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) &= \frac{\partial\rho}{\partial t} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k) &= \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k) v_i + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \end{aligned}$$

となるので、

運動量保存の法則をEuler的に表現した運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = \rho K_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \rho v_i v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \rho v_i v_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \rho v_i v_3}{\partial x_3}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

の式に代入すれば、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i &= \rho K_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \\
&= \rho K_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \\
&\quad + \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i \\
&- \rho v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_1} - \rho v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_2} - \rho v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_3}
\end{aligned}$$

となり、

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} v_i = \rho K_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_1} - \rho v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_2} - \rho v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_3}$$

を得る。両辺を ρ で割って、

$$\frac{\partial}{\partial t} v_i + v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_3} = K_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

を得る。この式は、

$$\frac{D}{Dt} V = K - \frac{1}{\rho} grad p$$

を成分で表現したものです。

ただし、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

とおく。

2次元の流れ

飛行機の翼を垂直に切断するような平面で機体の中心線に平行な面を考える。飛行機が飛んでいるときには、空気はこの平面に平行に流れるとして扱うことにします。

この時、流れは2次元的になり、この平面が x, y 平面となるように座標系をとると、速度ベクトル $V=(u, v, w)$ の成分は

$$u = u(x, y, t), v = v(x, y, t), w = 0$$

と書けます。

物体が縮まないと仮定すれば、連続の方程式は

$$div(v) = 0$$

となるので、

$$div(v) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

とかける。

任意の関数、 $\Psi(x, y, t)$ をとり、

$$u = \frac{\partial}{\partial y} \Psi(x, y, t) , \quad v = -\frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, y, t)$$

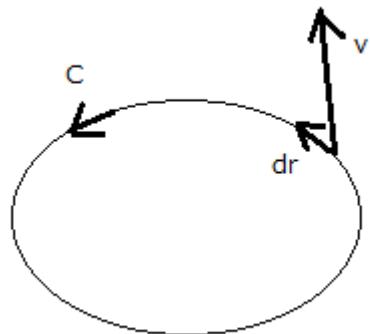
とすれば、

$$\operatorname{div}(v) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

が成立するので、連続の方程式は成立している。

渦度と循環

流れの中に任意の閉曲線 C をとる、



C に沿っての線積分

$$\Gamma(C) = \oint_C v \cdot dr = \oint_C v_s ds = \oint_C (u dx + v dy + w dz)$$

を考える。この $\Gamma(C)$ を C に沿っての循環という。

閉曲線 C に沿っての積分について、ストークスの定理

$$\oint_C X \cdot dx = \iint_S n \cdot \operatorname{rot} X dS$$

が成立するので、

$$\oint_C v \cdot dr = \iint_S n \cdot \operatorname{rot} v dS = \iint_S (\operatorname{rot} v)_n dS = \iint_S \operatorname{rot} v \cdot (ndS) = \iint_S \operatorname{rot} v \cdot dS$$

n は曲線 C を境界とする、曲面 S の法線ベクトルであり、曲面 S の裏側から、表側に向かうようにしてあり、ここで、 S の表側とは、閉曲線 C の沿って進むとき、左手側にあるような面を表、右側にある面を裏とする。なお、進む向き (C での正の向き) は事前に決めてあるとする。

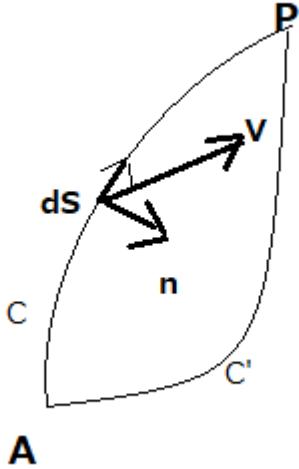
流れのベクトル v に対して、 $\omega = \operatorname{rot} V$ は渦度であるから、循環 Γ と渦度の間の関係は

$$\Gamma(C) = \iint_S \omega \cdot dS$$

と書ける。

流れの関数 Ψ

速度ベクトルと Ψ の関係を調べる。空間（座標系）を固定して、この空間内を流体が移動すると考える。空間内の2点A,Pを固定する。平面に沿っての流れを考える。



A,Pを結ぶ曲線Cを横切る流れを考える。単位時間に dS の所を通って、速度 v で通過する体積（面積）は、底辺が dS で、高さが $v \cdot n = v_n$ なので、体積（面積）は $v_n dS$ となる。これを集めてCを横切る体積 $\Psi(A, P; C)$ は、

$$\Psi(A, P; C) = \int_{A(C)}^P v_n dS$$

この量は、上の図のC‘を通って右側に出てゆく流体の量に等しい。なぜなら流体は縮んだり伸びたりしないと仮定しているからです。

従って、 $\Psi(A, P; C)$ の値は、Cには無関係で2点AとPだけで決まる。そこで、Aを固定して動かさなければ、 $\Psi(A, P; C)$ はPのみの関数 $\Psi(P)$ となる。

$$\Psi(P_2) - \Psi(P_1) = \int_{A(C)}^{P_2} v_n dS - \int_{A(C)}^{P_1} v_n dS = \int_{P_1(C)}^{P_2} v_n dS$$

を得る。

Pの座標を(x,y)とすると、流れの関数、

$$\Psi(P) = \int_A^P v_n dS$$

は(x,y)の関数であり、これを $\Psi(x, y)$ と書くことができる。

AとCを固定したときに、

$$\Psi(P) = \Psi(x, y) = const$$

は、流線を表す。

Pは、C上を移動するので、流れがCを横切るときは、その区間の積分の値が0ではなくなるので、上の式は成立しない。よって、 Ψ が定数となるCは、その上を流れが進んでゆく曲線である。これはCが流線であることを意味している。

曲線C上での近接した2点 $(P_2), (P_1)'$ を考える。この時、

$$\delta\Psi = \Psi(P_2) - \Psi(P_1) = \int_{P_1(C)}^{P_2} v_n dS = v_n \delta S$$

これより、

$$\frac{\delta \Psi}{\delta S} = \frac{\partial \Psi}{\partial S} = v_n$$

これより、

速度 v の n 方向の成分を求めるには、 Ψ を dS 方向に微分すればよいことが分かる。 dS の方向は n の方向を $\pi/2$ だけ回転した方向です。

x 方向成分を求めるには、これを $\pi/2$ だけ回転した方向である y 軸方向に関して微分すればよい、よって、

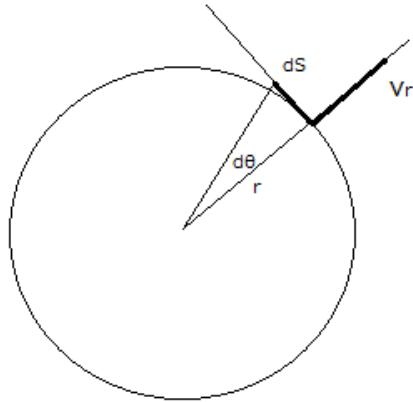
$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = v_x$$

y 方向成分を求めるには、それを $\pi/2$ だけ回転した x 軸とは逆方向に関して部分すればよい。

$$\frac{\partial \Psi}{\partial (-x)} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = v_y$$

極座標 (r, θ) では、

$$\frac{\delta \Psi}{\delta S} = \frac{\partial \Psi}{\partial S} = v_n$$



r 方向への速度成分を求めるには、その方向を 90 度回転した方向への微分、 $dS = rd\theta$ の方向微分を考えればよい。

$$v_r = \frac{\partial \Psi}{\partial (r\theta)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$$

また、接線方向への速度成分を求めるには、さらに、90 度回転した、 $(-r)$ 方向への方向微分を計算すればよい。

$$v_\theta = \frac{\partial \Psi}{\partial (-r)} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

を得る。

2 次元の流れでの渦度 ω は、平面での速度は、 $v = (u, v, 0)$ となることに注意して計算すれば、

$$\omega = (0, 0, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})$$

となるので、

渦度ベクトルは、 z 軸に平行となる

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = v_x = u, -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = v_y = v$$

を代入すると

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\Delta \Psi$$

となる。これは、流れの関数 Ψ が調和関数であることを示している。

複素速度ポテンシャル

縮まない流体の 2 次元渦なしの運動を考える。

渦なしとは、 $\omega = 0$ となることです。それは、

$$\omega = \text{rot}V = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$$

となるので、 $\omega = \text{rot}V$ がベクトル場における回転を表しているからです。

閉曲線 C に沿っての積分について、ストークスの定理

$$\oint_C X \cdot dx = \iint_S n \cdot \text{rot}X dS$$

となり、 $\text{rot}X = 0$ ならば、ベクトル場 X は渦なし、非回転的、層状ベクトル場といわれます。

保存ベクトル場ならば、

$$\oint_C X \cdot dx = 0$$

が成立するので、 $\text{rot}X = 0$ となるのですが、逆が成立するためには、条件が必要です。

定理 7. 単連結領域 D で定義されたベクトル場 X が $\text{rot}X = 0$ を満たせば、 X は保存ベクトル場となる。

理由は、次の“保存力場 F のポテンシャル”の中身と同じです。

定理 7 の条件が満たされている場合には、速度ポテンシャル Φ が存在する。さらに、縮まない流体の 2 次元運動なので、流れの関数 Ψ が存在する。

この時、流速 $v(u, v)$ を、

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

と表せます。

これは、 Φ 、 Ψ に対して、コーシー・リーマンの関係式が成立していることを意味しています。

これによって、

$$f = \Phi + i\Psi, \quad z = x + iy$$

と置いた f が、 z の解析関数となることを示している。この f を複素速度ポテンシャルという。

複素速度ポテンシャルを x について微分すると

$$\frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = u - iv$$

となる。この $w = u - iv$ を複素速度と呼ぶ。

簡単な流れの具体例

(1) 一様な流れ

U を実数として、

$$f = Uz$$

の場合は、

$$u - iv = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz} = U$$

となり、 $u = U$ 、 $v = 0$ となります。これは、 x 軸に平行な速度 U の一様流を表します。

(2) 湧き出し、すいこみ

m を実数として、

$$f = m \log z$$

の場合は、 $z = re^{i\theta}$ と置けば、

$$f = m \log(re^{i\theta}) = m(\log r + i\theta)$$

これによって、流れの関数 Ψ と、速度ベクトル v に対して、

$$v = \text{grad} \Phi$$

となる速度ポテンシャル Φ を使って、

$$f = \Phi + i\Psi, \quad z = x + iy$$

と書けば、

$$\Phi = m \log r, \quad \Psi = m\theta$$

となり、

流線は、 $\Psi = m\theta = \text{const}$ は、 $\theta = \text{const}$ となる。これは、原点から出る、放射線状の直線群である。

速度成分は、

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{m}{r}$$

となり、 $m > 0$ ならば、原点からの湧き出しを意味する。 $m < 0$ ならば、流れは原点に向かい、吸い込みを意味する。 m を湧き出し、吸い込みの強さという。

原点をとり囲む任意の閉曲線 C を一周する時の Ψ の変化 $[\Psi]_C$ を計算すれば、

$$Q = [\Psi]_C = [m\theta]_C = 2\pi m$$

となり、湧き出しの量 Q が求められる。

(3) 涡糸

実数 m の代わりに、純虚数 $i\kappa$ を使えば

$$f = i\kappa \log z$$

となり、 $z = re^{i\theta}$ を代入してから、実部 Φ 、虚部 Ψ を求めれば、

$$\Phi = -\kappa\theta \quad , \quad \Psi = \kappa log r$$

となる。

流線は、 $\Psi = \kappa log r = const$ より、 $r = const$ となる。

これは、流線が原点を中心とする同心円群となることを意味する。

円周方向の速度は

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{\kappa}{r}$$

原点を囲む曲線Cに沿っての循環は

$$\Gamma = [\Phi]_c = -\kappa[\theta]_c = -2\pi\kappa$$

となる。

静止円柱を過ぎる一様な流れ

x 軸の方向に流れる速度 U の一様流の中に、中心を原点とする半径 1 の円柱があるとする。

流れを表す複素速度ポテンシャルを f とすれば、 f は $z = x + iy$ の解析関数である。

複素速度 df/dz も解析関数で、しかも流れの中でいたるところで、一価正則である。したがって

$$\frac{df}{dz} = U + \frac{k_0}{z} + \frac{k_1}{z^2} + \dots$$

のような級数展開が可能となる。

定数項を U としたのは、無限遠で一様流 $U = u - iv$ になると仮定しているからである。

上の式を積分すれば、

$$f = Uz + k_0 \log z + \frac{k_1}{z^1} + \dots$$

となる。

これが、物体の周りの一様流を表す複素速度ポテンシャルの一般形である。

円柱面 $|z| = 1$ が流線に一致することから、

$$\Psi = Im f = const, \quad z = e^{i\theta}$$

が要求される。

一般に、係数は複素数なので、

$$c_0 = a_0 + ib_0, \quad k_0 = m + i\kappa, \quad k_n = a_n + ib_n, \quad (n = 1, 2, 3)$$

と置いて、円柱表面 $z = e^{i\theta}$ での f を計算すると

$$\begin{aligned} f &= Ue^{i\theta} + a_0 + ib_0 + (m + i\kappa)i\theta + \sum (a_n + ib_n)e^{-in\theta} \\ &= U\cos\theta + a_0 - \kappa\theta + \sum (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \\ &\quad + i \left\{ U\sin\theta + b_0 + m\theta + \sum (b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta) \right\} \end{aligned}$$

ここで、

$$\Psi = \operatorname{Im} f = \text{const}$$

となるには、

$$m = 0, \quad a_1 = U, \quad b_1 = 0, \quad a_n = b_n = 0 \ (n = 2, 3, \dots)$$

より、

$$k_0 = i\kappa, \quad k_1 = U, \quad k_n = 0 \ (n = 2, 3, \dots)$$

任意定数 $c_0 = a_0 + ib_0$ を 0 とすれば、

$$f = Uz + ik \log z + \frac{U}{z^1}$$

が、複素速度ポテンシャルである。

一様流 Uz 、原点に置かれた渦糸 $ik \log z$ 、原点に置かれた $-x$ 方向の二重湧き出し U/z の重ね合わせとして、一様流が静止円柱を過ぎる様子が表現されている。

(1) 循環のない場合

この場合は、

$$f = U \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

となり、円柱表面では $z = e^{i\theta}$ となり、

$$f = \Phi + i\Psi = U(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 2U \cos \theta$$

となり、

$$\Phi = 2U \cos \theta$$

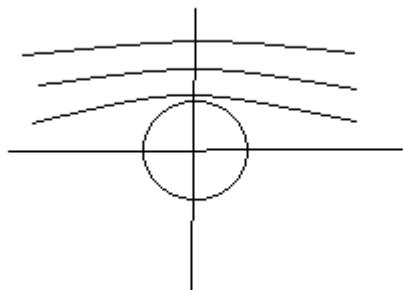
$$\Psi = 0$$

となり、円柱表面での流速は、 $r=1$ に注意して、

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -2U \sin \theta$$

となる。大きさは、 $q = 2U|\sin \theta|$ となるので、 $\theta = \pm \pi/2$ において最大となる。この時は、一様流の速さが U であるのに対して、最大速度はその 2 倍、 $2U$ である。

円柱の周りの流線の様子は、下の図のようになる。



なお、ベルヌーイの定理

$$P + \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g z = \text{一定}$$

で、 $z=0$ での流れとして考えて、

$$p + \frac{\rho}{2} V^2 = \text{const} = p_\infty + \frac{\rho}{2} U^2 = p_0 + \frac{\rho}{2} 0^2$$

に対して、

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -2U \sin \theta$$

を代入すると、

$$p = \text{const} = p_\infty + \frac{\rho}{2} U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta)$$

となる。この事から、一様流での圧力 p_∞ に比べて、

$$|\sin \theta| > \frac{1}{2}$$

の場合は低下する。

これに関しては、下側でも同様なので、円柱には揚力が働く。

(2) 循環のある場合

これについては

$$f = Uz + ik \log z + \frac{U}{z^1} = f = U \left(z + \frac{1}{z} \right) + ik \log z$$

と書ける。

渦糸の部分、 $ik \log z$ に関して、円柱のヘリに近い場所では、 $z = re^{i\theta}$ を代入してみれば、

$$ik \log r e^{i\theta} = ik (\log r + i\theta) = -\kappa \theta + ik \log r$$

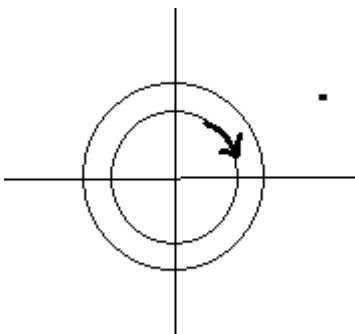
となり、 $\Phi = -\kappa \theta$, $\psi = \kappa \log r$ とすると、

流線は、 $\psi = \kappa \log r = \text{const}$ より、流線は、原点を中心とする同心円群である。

円周方向の速度成分 v_θ は、

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{\kappa}{r}$$

となるので、 $\kappa > 0$ の場合は、原点の周りを時計方向に回る流れを表す。



原点を取り囲む任意の閉曲線 C に沿っての循環は

$$\Gamma = [\Phi]_C = -\kappa[\theta]_C = -2\pi\kappa$$

で与えられるので、(27.12) は原点に強さ $\Gamma = -2\pi\kappa$ の渦糸があるときの流れを表す。これは時計と反対方向での循環を表している。時計方向の循環は、 $2\pi\kappa$ になる。

$\kappa > 0$ の場合について考えると、時計方向の循環

$$\Gamma = 2\pi\kappa$$

の大きさと、流れの様子の関連を調べます。

$$f = U \left(z + \frac{1}{z} \right) + i\kappa \log z$$

の複素速度は、

$$u - iv = \frac{df}{dz} = U \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) + \frac{i\kappa}{z}$$

となるので、よどみ点 z_s は、

$$\frac{df}{dz} = U \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) + \frac{i\kappa}{z} = 0$$

より、 z^2 を掛けて 2 次方程式を解けば、

$$U(z^2 - 1) + i\kappa z = 0$$

$$z_s = \frac{-i\kappa \pm \sqrt{-\kappa^2 + 4U^2}}{2U} = -\frac{i\kappa}{2U} \pm \sqrt{1 - (\frac{\kappa}{2U})^2}$$

となる。 κ と U の関係で 3 つの場合に分かれる。

$\kappa < 2U$ の場合

z_s が複素数であり、 $|z_s| = 1$ となっているので、よどみ点は円柱面上に存在する。

$\kappa = 2U$ の場合

$$z_s = -i$$

となる。

$\kappa > 2U$ の場合

z_s は純虚数となり、y 軸上によどみ点が 2 つある。解と係数の関係から、2 つの解の積は、1 なので、片方の絶対値が 1 より大きければ、他方の絶対値は 1 より小さい。

よって、一つは円内に存在し、他方が円の外にある。

円柱表面、 $z = e^{i\theta}$ では、

$$f = \Phi + i\Psi = U(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + i\kappa \log(e^{i\theta})$$

より、

$$\Phi = 2U \cos \theta - \kappa \theta$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -(2U \sin \theta + \kappa)$$

となる。

ベルヌーイの定理より、圧力分布は

$$p = p_0 - \frac{\rho}{2} v_\theta^2 = p_0 - \frac{\rho}{2} (4U^2 \sin^2 \theta + 4\kappa U \sin \theta + \kappa^2)$$

であり、

円柱に働く圧力の合力 F は

$$F = - \oint p n ds$$

であり、円に対する法線ベクトルは、 $n = (\cos \theta, \sin \theta)$

であるから、

$$X = - \oint p \cos \theta ds$$

$$Y = - \oint p \sin \theta ds$$

として、0~2πまで積分すれば

$$X = - \oint (p_0 - \frac{\rho}{2}(4U^2 \sin^2 \theta + 4\kappa U \sin \theta + \kappa^2)) \cos \theta ds = 0$$

$$Y = - \oint (p_0 - \frac{\rho}{2}(4U^2 \sin^2 \theta + 4\kappa U \sin \theta + \kappa^2)) \sin \theta ds = \oint \frac{\rho}{2}(4\kappa U \sin \theta) \sin \theta d\theta = 2\pi \kappa \rho U$$

時計方向の循環Γは、2πκなので、

$$Y = \rho U \Gamma$$

を得る。これは、クッタ・ジューコフスキイの定理の特別な場合である。

クッタ・ジューコフスキイの定理 (p 130)

平面上での、一様な流れの中に1個だけ物体が存在している場合を考える。

一様流の方向にx軸をとり、流れを表す複素速度ポテンシャルは(28.1)により、

$$f = Uz + c_0 + k_0 \log z + \frac{k_1}{z} + \frac{k_2}{z^2} + \dots$$

の形になる。

ここで、Uは一様流の速度の大きさである。

いま、物体を取り囲む閉曲線C(Cは複素平面の原点も物体も共に含むとする。)を一周するときのfの変化を考えると、

$$[f]_c = [\Phi]_c + i[\Psi]_c = \Gamma(C) + iQ(C)$$

である。Γ(C)はCに沿っての循環、Q(C)はCを通って左から右に通過する流量である。

Cを正の向き(時計と逆の回り方)に回るとすれば、Q(C)はCを横切って流出する流量を与える。また、

$$z = e^{a+\theta i} = e^a e^{\theta i} = r e^{\theta i}$$

と書けば、zが原点の周りを1回まわって、元の位置に来た時には、偏角θが連続的に変化して(θ+2π)になつていると考えます。

kが整数ならば、z^kは、(e^{a+θi})^kから(e^{a+(θ+2π)i})^kになりますが、(e^{a+θi})^k(e^{2πi})^k = (e^{a+θi})^kとなり変化しませんが、

$\log z = a + \theta i$ は、 $a + (\theta + 2\pi)i$ になります。

一回りしたときの値の差は、

$$[\log z]_c = 2\pi i$$

となります。従つて、

$$[f]_c = 2\pi i k_0$$

となるので、

$$k_0 = m + i\kappa$$

と置けば、

$$\Gamma(C) = -2\pi\kappa, Q(C) = 2\pi m$$

となります。

この式の意味は、物体の周りに循環があれば $\kappa \neq 0$ 、物体からの湧き出しがあれば $m > 0$ 、吸い込みがあれば $m < 0$ となっています。

複素ポテンシャルを微分して、複素速度を求める

$$\frac{df}{dz} = U + \frac{k_0}{z} - \frac{k_1}{z^2} - \frac{2k_2}{z^3} - \dots$$

これを、Blasius の公式に代入するのだが、積分路を原点から大きく離れた場所にとって考えると、次の様な近似式が使える。

$$(\frac{df}{dz})^2 = U^2 + 2U\frac{k_0}{z} + (k_0^2 - 2Uk_1)\frac{1}{z^2} + O(\frac{1}{z^3})$$

$$\oint_C z^m dz = [\frac{z^{m+1}}{m+1}]_C = 0, (m \neq -1)$$

$$\oint_C z^m dz = [\log z]_C = 2\pi i, (m = -1)$$

となるので、(30.5) は

$$X - Yi = -2\pi\rho U k_0 = -2\pi\rho U(m + ik) = -\rho U(Q(C) - i\Gamma(C))$$

よって、

$$X = -\rho U Q, \quad Y = \rho U \Gamma$$

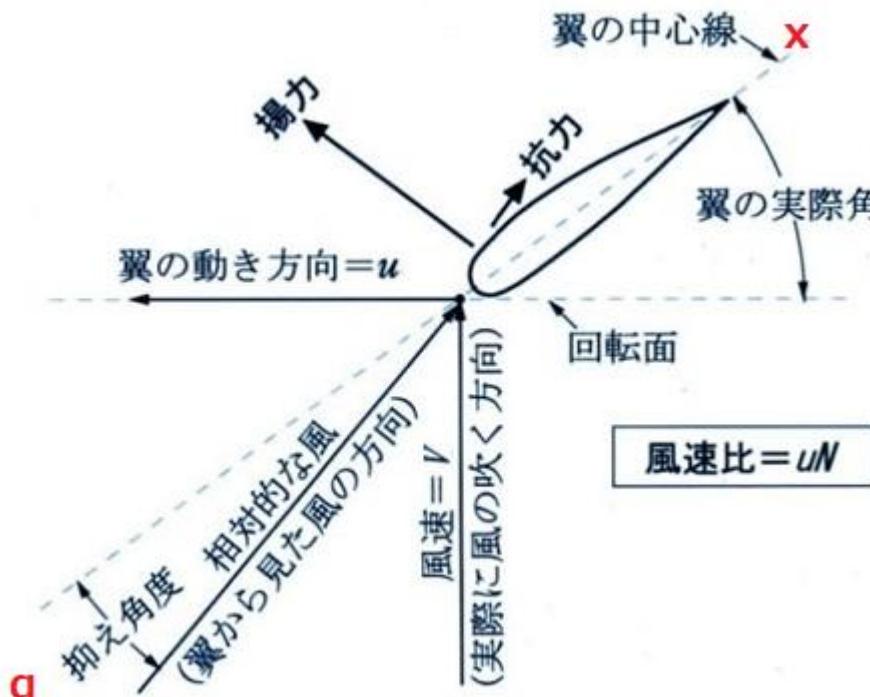
となる。このとき、Q は物体から流出する流量、Γ は物体の周りの時計回りの循環である。

Blasius の第 2 公式を使うには、31.6 式に、z を掛けたものを使う。

$$M_z = -\frac{1}{2}\rho \cdot Re[(2\pi i)((m + ki)^2 - 2Uk_1)] = \frac{\rho Q \Gamma}{2\pi} - 2\pi i \rho U \cdot Im(k_1)$$

となる。

以上は、一様流が x 軸に平行な場合である。一様流が x 軸に対して角 α だけ傾いている場合を考えるには、上の結果で、 $z \rightarrow ze^{-i\alpha}$ という置き換えをすればよい。



この場合は、複素速度ポテンシャルは、

$$f = Uze^{-i\alpha} + c_0 + k_0 \log(ze^{-i\alpha}) + \frac{k'_1}{z} + \frac{k'_2}{z^2} + \dots$$

となり、また、物体に働く力 F の一様流に平行な成分（抵抗 D ）と一様流に直角な成分（揚力 L ）は、

$$D = -\rho U Q, L = \rho U \Gamma$$

となり、さらに、原点 O の周りのモーメントは、

$$M_z = \frac{\rho Q \Gamma}{2\pi} - 2\pi \rho U \cdot \text{Im}(k_1 e^{-i\alpha})$$

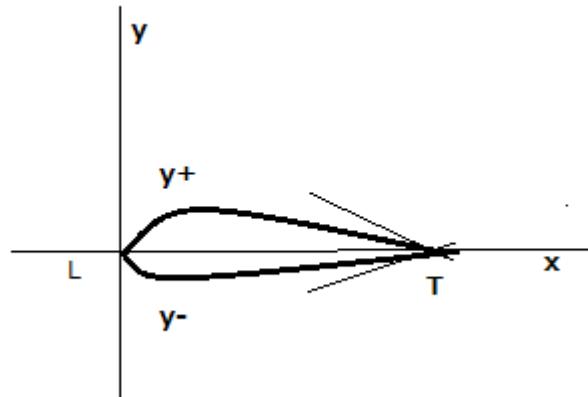
式

$$L = \rho U \Gamma$$

が、クッタ・ジューコフスキイの定理です。

2次元翼理論 (p 143)

下のような形の翼を考える。



翼弦に沿って x 軸を採れば、翼の上面と下面の式を、

$$y = y_+(x), y = y_-(x)$$

として、

$$t(x) = y_+(x) - y_-(x)$$

$$c(x) = \frac{1}{2}(y_+(x) + y_-(x))$$

とした式は、翼の厚さと翼のそりを表すことになる。

リーマンの写像定理によれば、 z 平面上の翼型 P の外部の領域へと、 Z 平面上の単位円 K の外部の領域を写像するような解析関数

$$z = g(Z)$$

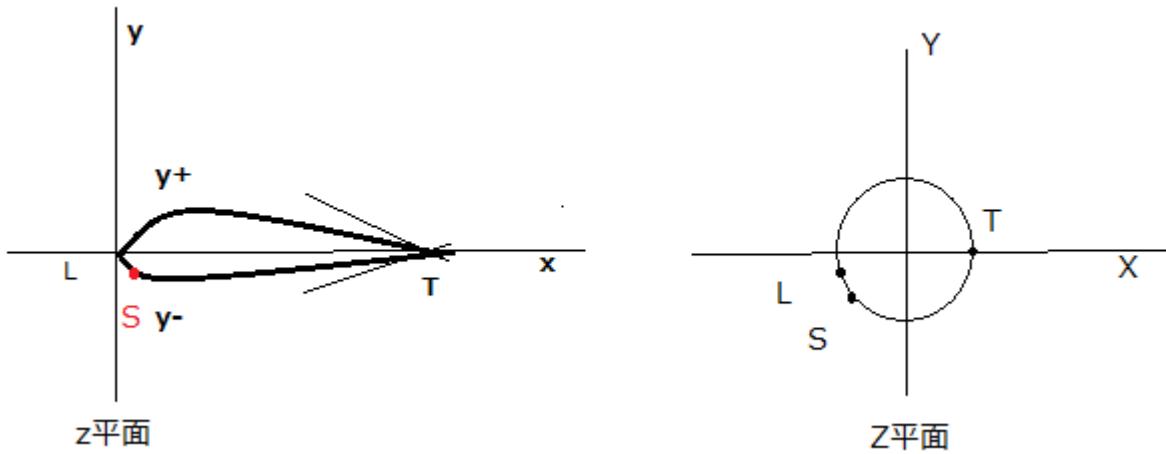
は、必ず存在して、

$$z = c_{-1}Z + c_0 + \frac{c_1}{Z} + \frac{c_2}{Z^2} + \dots$$

のように、 Z の Laurent 級数として表される。(複素関数論、辻正次、牧書店、p 320 参照)

単位円 K 自身は、 $Z = e^{i\theta}$ で与えられる。

さらに、 $z = \infty$ は $Z = \infty$ に対応し、後縁 T は $Z = 1$ に対応するように指定できる。



いま、翼絃に沿って、 x 軸が選ばれているものとする。一様流の速度を U 、迎え角を α とすれば、流れを表す複素速度ポテンシャル f は、 $z \rightarrow \infty$ ($Z = \infty$) に対して、

$$f = U e^{-i\alpha} z + \dots = c_{-1} U e^{-i\alpha} Z + \dots = U' e^{-i\alpha'} Z + \dots$$

ただし、

$$c_{-1} = \lambda e^{i\delta}, U' = \lambda U, \alpha' = \alpha - \delta$$

と置く。

これより、 Z 平面では、速度 U' 、傾き α' の一様流が円 K を過ぎて流れることになり、この時 f は

$$f = U' \left(e^{-i\alpha'} Z + \frac{e^{i\alpha'}}{Z} \right) + i\kappa \log Z$$

で与えられる。

特に、翼型 P は、 $Z = e^{i\theta}$ に対応するから、翼型表面での速度ポテンシャルは、

$$\Phi = \operatorname{Re} f = 2U' \cos(\theta - \alpha') - \kappa\theta$$

である。

Joukowski の仮定、“後縁 T で流速が有限である”を要求すると、 Z 平面では $Z = 1$ 、($\theta = 0$) がよどみ点となり、

$$\left(\frac{d\Phi}{d\theta} \right)_{\theta=0} = 0$$

これより、

$$\kappa = 2U' \sin \alpha' = 2U' \sin(\alpha - \delta)$$

が得られる。

ここで、複素ポテンシャルが確定した。

$$\begin{aligned} \Gamma &= 2\pi\kappa \\ \kappa &= 2\lambda U \sin(\alpha - \delta) \end{aligned}$$

を使えば、

翼に働く揚力 L は、Kutta-Joukowski の定理によって

$$L = \rho U \Gamma = 4\pi \rho U^2 \lambda \sin(\alpha - \delta)$$

で与えられる。揚力は、一様流の速度 U の 2 乗に比例することがわかる。

8.2 風車の振動と音

8.2.1 塔やブレードの固有振動数

塔や、塔の中の気柱の固有振動数が、0.816667Hzなのかと考えたりしましたが、その考え方は誤りで、強制振動と考えるべきだと思っています。

塔の固有振動数に関しては、

実風車における現地観測とその振動特性に関する一考察

において、次の結果が得られている。ただし、風車が発電している状態の振動を調べるものでは無い。

できた。今回の観測では、タワー頂部のみに加速度計を設置したため、固有値解析から得られたすべての高次固有振動数は現地観測データからは見られない。これらの高次固有振動数を観測するため、タワーの中間位置に加速度計を設置する必要性があると思われる³⁾。

表1 固有振動数の観測値と予測値との比較

No	観測 (Hz)	固有値解析 (Hz)		
		ブレード	タワー	風車全体
1	0.50	2.19	0.54	0.50
2	0.50	4.73	0.54	0.51
3	1.98	-	4.36	2.10
4	2.15	-	4.36	2.19
5	2.20	-	-	2.20
6	-	-	-	3.26
7	3.80	-	-	3.46
8	3.81	-	-	3.91
9		-	-	4.77
10		-	-	5.05

この表の元になっているのは、次の、パワースペクトルの計算結果です。ただし、加速度センサーは、タワー頂部だけに置かれていた。

3.2 風車の振動数 図 3 には観測により得られた応答加速度の波形から求めたパワースペクトル密度を示し、 0.5Hz , 2.0Hz , 6.8Hz , 8.9Hz 付近にはっきりしたピークが見られている。低い振動数 0.5Hz と 2.0Hz は風車タワーの1次固有振動数と風車ブレードの1次固有振動数に対応し、その他の振動数はブレード、タワーの高次固有振動数、又はブレードとタワーとの連成振動モードの固有振動数に対応していると思われる³⁾。

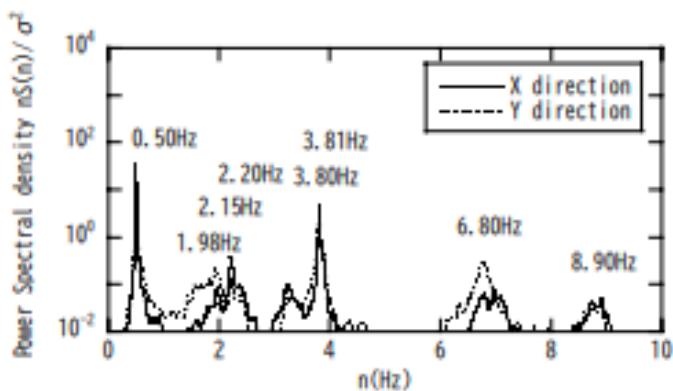


図 3 応答加速度のパワースペクトル密度

ブレードの固有振動数に関しては次の研究結果もある。

CFRP 製風車ブレードの振動及び曲げ実験と解析

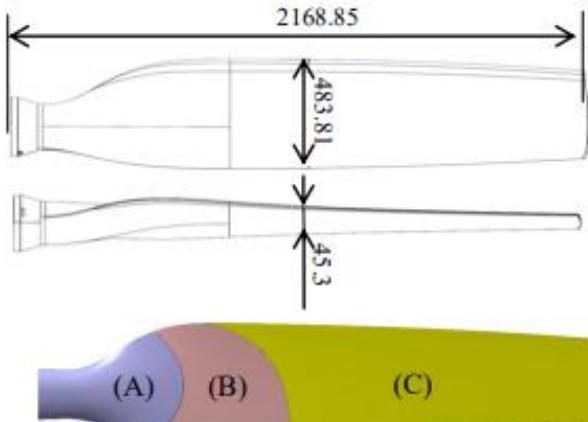


Fig.1 Dimensions of CFRP wind turbine blade

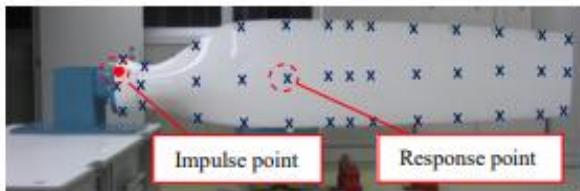


Fig.2 Impulse and response points

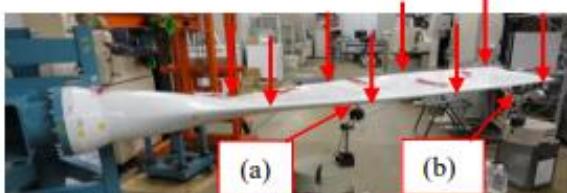


Fig.3 Positions of loads and displacement measurements

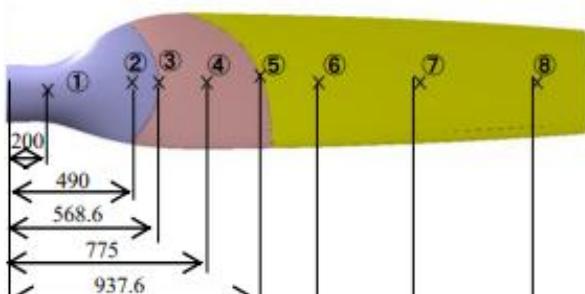
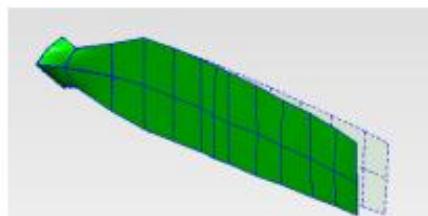


Table 1 Natural frequencies

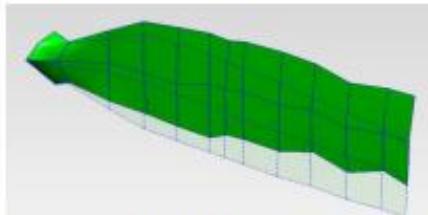
	Natural Frequency [Hz]			
	Blade 1	Blade 2	Blade 3	Ave.
1st	14.5	14.5	14.7	14.6
2nd	26.9	27.1	27.2	27.1
3rd	50.4	60.1	52.7	54.4

Table 2 Damping ratios

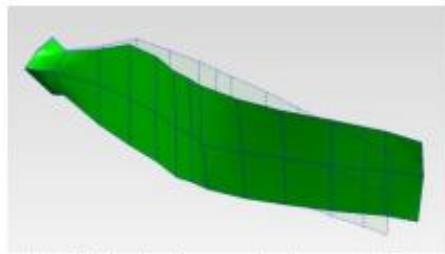
	Damping Ratio [%]			
	Blade 1	Blade 2	Blade 3	Ave.
1st	0.299	0.384	0.151	0.278
2nd	0.911	1.210	0.933	1.018
3rd	0.645	0.778	0.748	0.724



(a) First vibration mode shape, 14.6Hz



(b) Second vibration mode shape, 27.1Hz



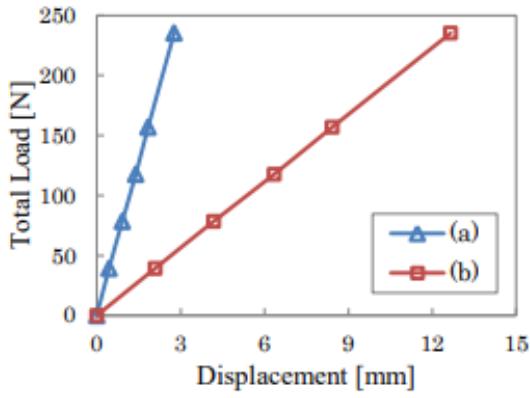


Fig.6 Results of displacement

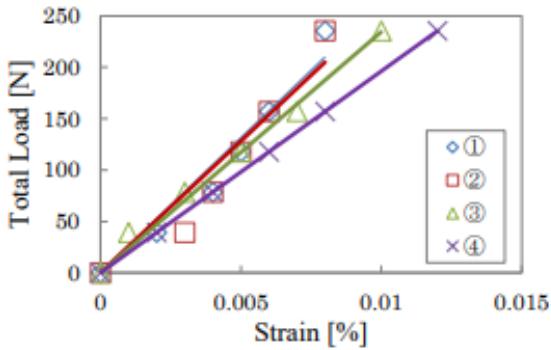


Fig.7 Results of strain (①-④)

4.2 加振実験結果と振動解析結果の比較

Table 4にインパルス加振実験で求めた固有振動数とFEM解析結果の比較を示す。また、FEM解析より求められた振動モードをFig.9に示す。実験結果の1次固有振動数は14.6Hzに対し、FEM解析結果は15.2Hzで誤差4.2%と良好な一致を示した。また、FEM解析で求められた振動モードも1次の曲げモードを示し、実験結果と良好な一致を示した。2次固有振動数、3次固有振動数はそれぞれ誤差が34.9%と16.1%と大きくなかった。しかし、振動モードは2次と3次共に良好な一致を示した。

Table 3 Material properties

CFRP	W-3101 3K TRK101M 12K	
Modulus of elasticity		
Longitudinal	50.4 GPa	52.6 GPa
Transverse	7.1 GPa	7.4 GPa
Shear	3.44 GPa	3.84 GPa
Poisson's ratio		
Longitudinal	0.34	0.34
Transverse	0.02	0.02
Urethane Core		
Young's modulus	12 MPa	
Poisson's ratio	0.25	

Table 4 Comparison between experimental and FEM results

	Natural Frequency		
	Experiment [Hz]	FEM [Hz]	Difference [%]
1st	14.6	15.2	4.2
2nd	27.1	41.6	34.9
3rd	54.4	64.8	16.1

8.2.2 振動制御

ブレードも振動します。

Development of Next Generation 2MW Class Large Wind Turbines のなかで、上田悦紀¹ 柴田昌明、両氏は、次のように提案している。

44.7 m
36.2 m
29.5 m

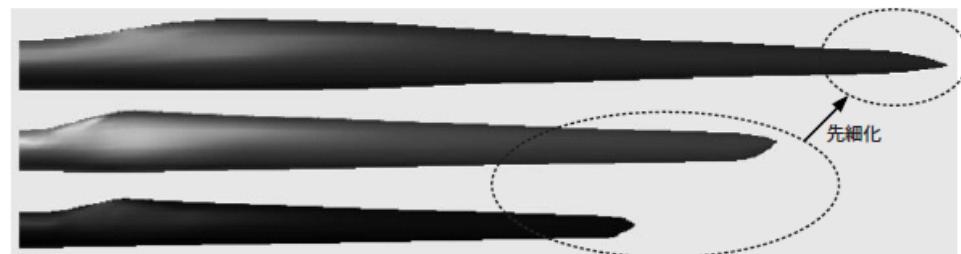


図5 スリム翼の採用

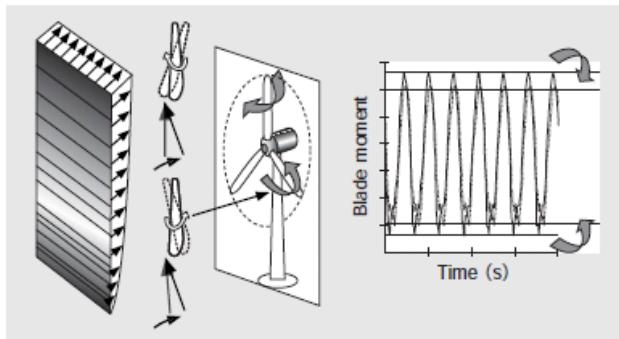


図6 翼の独立ピッチ制御

これは例えば出力が2倍になると、主軸トルクは2.8倍、強度は0.7倍、価格は2.8倍(kW単価で1.4倍)になることを意味する。対策として、次の2つの方法が有効である。

(1) 延長機翼の半径縮小

(1) スリム翼の採用

先細のスリムな翼形状(図5)の採用により、ロータ径拡大(長翼化)に伴うスラスト力の増大を抑制する。つまり、片持ち梁としての翼の先端荷重を減らして効率的に主軸に働くモーメントを抑制した。

(2) 可变速運転

風車を可变速運転することにより、風の短周期の変動をロータ回転数の増減で吸収、平準化して、疲労荷重を軽減する。これはギアレス同期可变速風車での経験⁽⁶⁾を活かしている。

(3) 翼の独立ピッチ制御

地表の摩擦のために風速には高度分布(ウインドシェア)があり、風車には1回転毎に疲労荷重が加わる。

回転に同期して、荷重変動を相殺するように翼のピッチ角を微修正して、疲労荷重を軽減する(図6)。翼に応力センサーを設置して、より詳細な荷重制御を行う研究を進めている。

(4) タワーのアクチブ制振

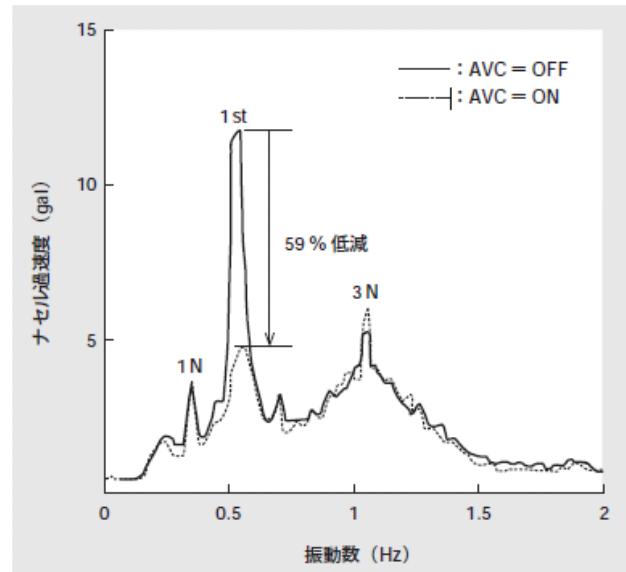


図7 タワーのアクチブ制振の効果

タワー上部にセンサーを設置し、その情報を元に翼のピッチ角をタワー変位が相殺されるように微小制御して、風車に働く主風向の荷重を軽減する。愛媛県瀬戸町の当社1 000 kW風車で作動確認を行った結果を図7に示す。

以上の内容がうまく実現できれば、風車ブレードの振動や、回転軸の振動を抑えることができるうことになる。

8.2.3 風車振動の調査結果

風車が発電している状態での振動に関しては、より詳細な調査も行われている。

風車ナセル・タワーの振動解析

です。

1. はじめに

風力発電システムは複数の結合部を有し、振動が伝搬する距離も長く、ナセル・タワー間は回転部を有しているためローラーと複数の点接触により結合されている。さらに、ナセルにはロータを介してブレードが取り付けられており、内部には増速器、発電機等の重量物が設置された構造体となっている。また、タワーは10m間隔に頑強なボルトにより締結され、フロアが設置された構造となっている。

つぎに、振動の励振源¹⁾²⁾³⁾を考えると①風力によりブレードが励起される振動、②ブレード質量のアンバランスによる振れ回り振動、③発電機が発する振動、増速器ギヤによる振動、④ヨーブレーキによる振動および、ヨー回転によるねじり振動、⑤地震等によるその他の振動があり、ナセル・タワーの振動形態は一義的に決まっても励振力により多様な連成振動形態が予想される。本報告では、ナセル・タワーが励起される連成振動のモード分離・解析を行うことを目的とし、ナセル内ロータ近傍に傾斜センサおよび、ナセル内梁に加速度センサ、タワー内壁面に加速度センサを設置してセンサ出力からナセル・タワーの振動特性を明らかにする。さらに、風によるブレード振動ロータ周りの振れ回り、タワー特有の振動モード形状について明らかにすると共に、タワー・ナセル内で発生する振動を震度表に当てはめ評価を行う。

まず、振動解析を行うために加振源を明らかにすることから始め、個々の加振源からの振動伝搬について明らかにする。つぎに伝搬振動の可視化として変形図リサーチュ線図を用いて伝搬過程を明らかにする。その際に使用するセンサ類はナセル内傾斜計、加速度計および、タワー内10m間隔に設置した水平加速度計を

用いる。最後に伝搬振動を震度表に当てはめ作業者等が感じる震度を明らかにする。

2. 振動発生メカニズム

風力発電システムに常時加わる励振力を整理すると以下の5つに分類することができる。

Fin1: 風速がブレードを通過する際にブレードに加わる外力

Fin2: ブレードの偏芯によるふれ回り振動

Fin3: 発電機・増速器ギヤ回転振動

Fin4: ヨーモータ・ヨーブレーキねじり振動

Fin5: その他の振動

上記5種類の加振力は図1に示すようにナセル・タワーの振動モードを励振することとなる。風による加振では、風の流入方向にナセル・タワーを振動させることとなる。ブレード偏芯では、ブレード回転数に応じた偏芯が遠心力として働きブレードの直交方向にナセル・タワーを加振し、ヨーモータ・ヨーブレーキはタワー円周方向に回転反力が伝搬するためタワーをねじる振動が発生する。それら加振源がナセル・タワー内で連成し合い、その結果がOutputとなる。

つぎに、計測システムとしては、ナセル内に分解能0～2Hzの傾斜計(鉛直角度、ローリング角度)が主軸根

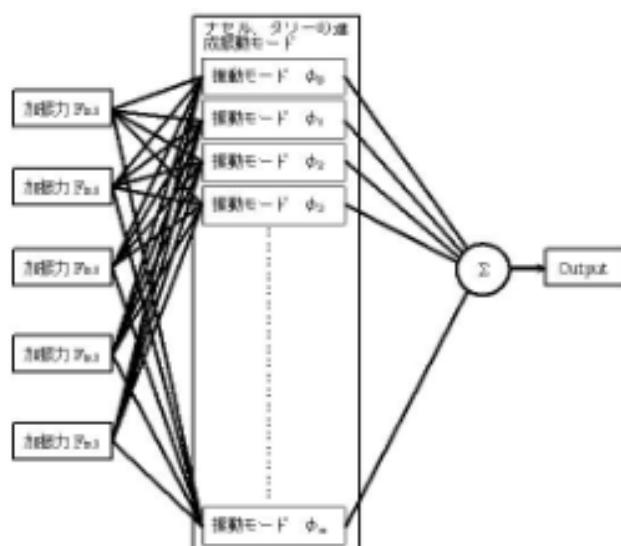


図1 振動の発生メカニズム

元に設置されており、ナセル梁部分に 3 軸の加速度センサ(分解能 0.1Hz~8KHz, 感度 800pc/G)を設置している。さらに、タワーには水平方向 2 軸に加速度センサ(分解能 0.1Hz~8KHz, 感度 800pc/G)を設置してそれらのデータを取得するシステムとなっている。振動解析では取得したデータの中から風車の制御が安定しており、風況の変化が緩やかな時間のみを有効データとするため、以下の条件で抽出を行った。

1. 風速の変動が少ない時間 : $\sigma < 0.5 \times \bar{V}/10$
2. 風向の変動が少ない時間 : (風向標準偏差) < 5 度
3. 風向とナセル角度の差が ±14 度以下
4. ヨーが駆動していない時間

ただし、 σ は風速の標準偏差、 \bar{V} は平均風速とし、風向は 300 度方向からの風だけを抽出している。

各種センサで取得したナセル・タワー振動の FFT 解析した結果を示すと図 2 から図 7 となる。図 2, 3 は傾斜計の FFT を示しており、図 2 はロータのローリング、図 3 はロータピッチングの傾斜角度を示している。

図 2, 3 は Bin 5(風速 4.5~5.5m/s)の場合の FFT 解析結果であり、傾斜計の分解能 2Hz 以下が正確に観測できている。計測設定としては、サンプリング速度 1kHz、ハイパスフィルタ 0.1Hz、ローパスフィルタ 1kHz の設定とした。図 2 の鉛直方向では 0.5Hz, 0.8Hz, 2.7Hz 付近にゲインの増大が確認できる。これらのゲインの増大は 0.5Hz がロータ回転数に比例した振動、すなわち偏芯振動となっており、0.8Hz が 1 次のタワーねじり振動モード、2.7Hz がナセルの振動モードとなっている。図 3 のローリング方向では 0.8Hz, 1.6Hz, 2.7Hz にゲインの増大が確認でき、ロータの偏芯が顕著には

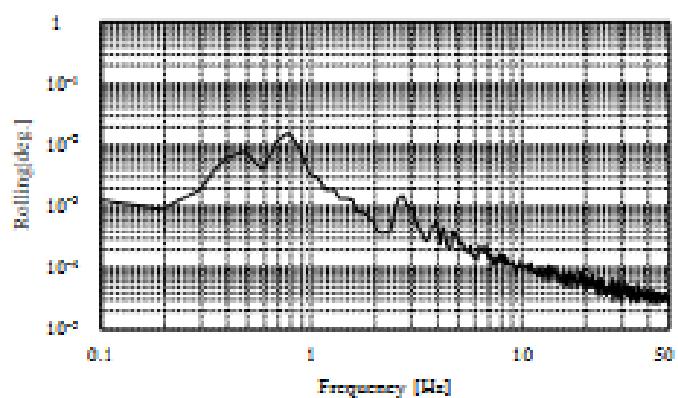


図 2 ナセル内傾斜計船直方向スペクトル

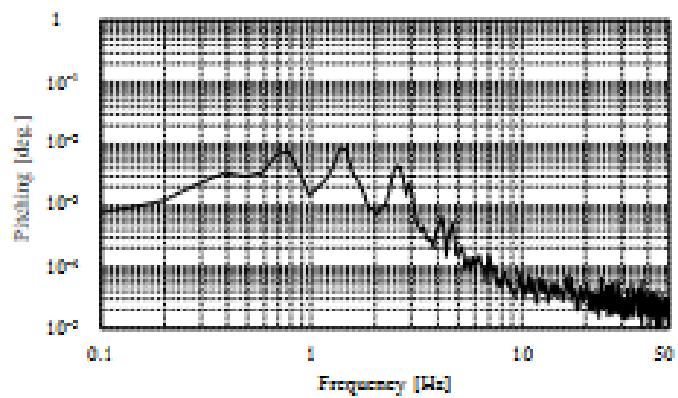


図 3 ナセル内傾斜計ローリング方向スペクトル

現れておらず、代わりに 1.6Hz に羽根数×回転数の振動が現れている。これは、上下左右の風速差と羽根数によるブレード変形振動が起因しているものと考える。また、0.7Hz に 1 次のタワー曲げ振動モードが表れており、0.8Hz のタワーねじり振動モードと同レベルとなっていることが観測でき、タワー振動がブレードに影響していることが分かる。

図4, 5はナセル振動の210度方向, 300度方向スペクトルを示す。図4は210度方向(主流直交方向)の加速度、図5は300度方向(主流方向)の加速度をセンサ感度800pc/m/Gのピックアップを用いて計測したスペクトルである。加速度計の帯域幅は8kHzまで計測可能であるので傾斜計と比較すると高周波数成分が表れている。210度方向ではロータ回転周波数0.5Hzが若干表れ、羽根数×回転数1.6Hzが顕著に表れている。2Hz以上では細かな共振点が複数あらわれナセル振動モードの2.7Hz、タワー2次の振動モード(6Hz)、低速ギヤ振動等が表れ複雑なスペクトルとなっている。図5(300度方向)も同様に1次のタワーねじり振動モード(0.8Hz)以降は各種の振動が表れている。両図共に10Hz以降は中速ギヤ、高速ギヤ、発電機ナセル補機振動、ナセル高次モード、タワー高次モードの区別がつかない振動スペクトルとなっている。

図6, 7にはタワー振動の210度方向、300度方向スペクトルを示す。ここで、タワー内加速度のサンプリング速度は100Hz、ローパス0.1Hz、ハイパス100Hzとしている。タワー40m振動では1次のタワー曲げ振動モード(0.7Hz)、1次のタワーねじり振動モード、2次のタワー曲げ振動モード、ナセル振動モード(長手方向、横方向)が帯域幅のある振動として表れている。

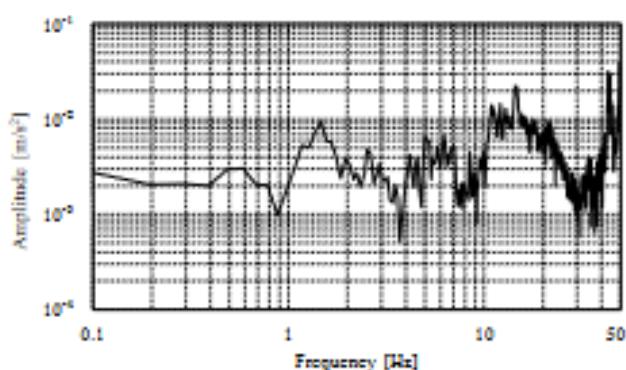


図4 ナセル内加速度 210度方向スペクトル

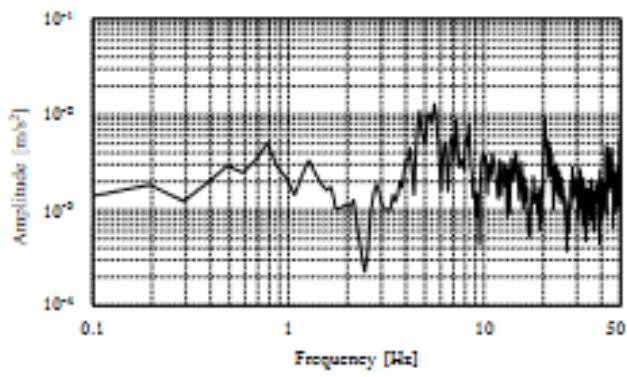


図 5 ナセル内加速度 300 度方向スペクトル

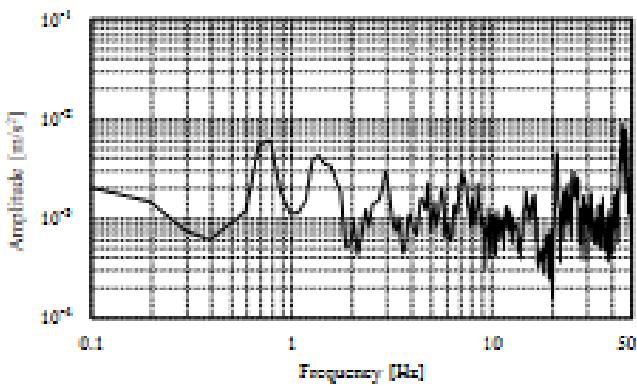


図 6 タワー内 40m 加速度 210 度方向スペクトル

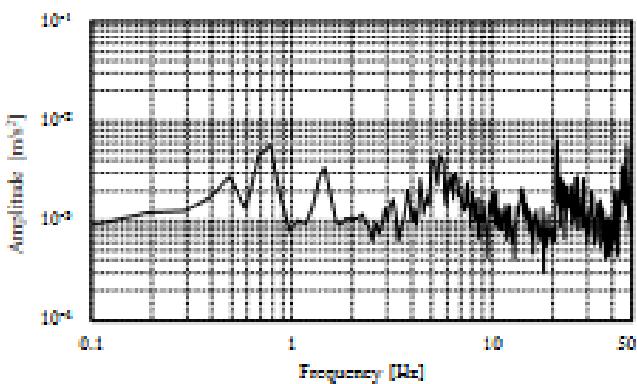


図 7 タワー内 40m 加速度 300 度方向スペクトル

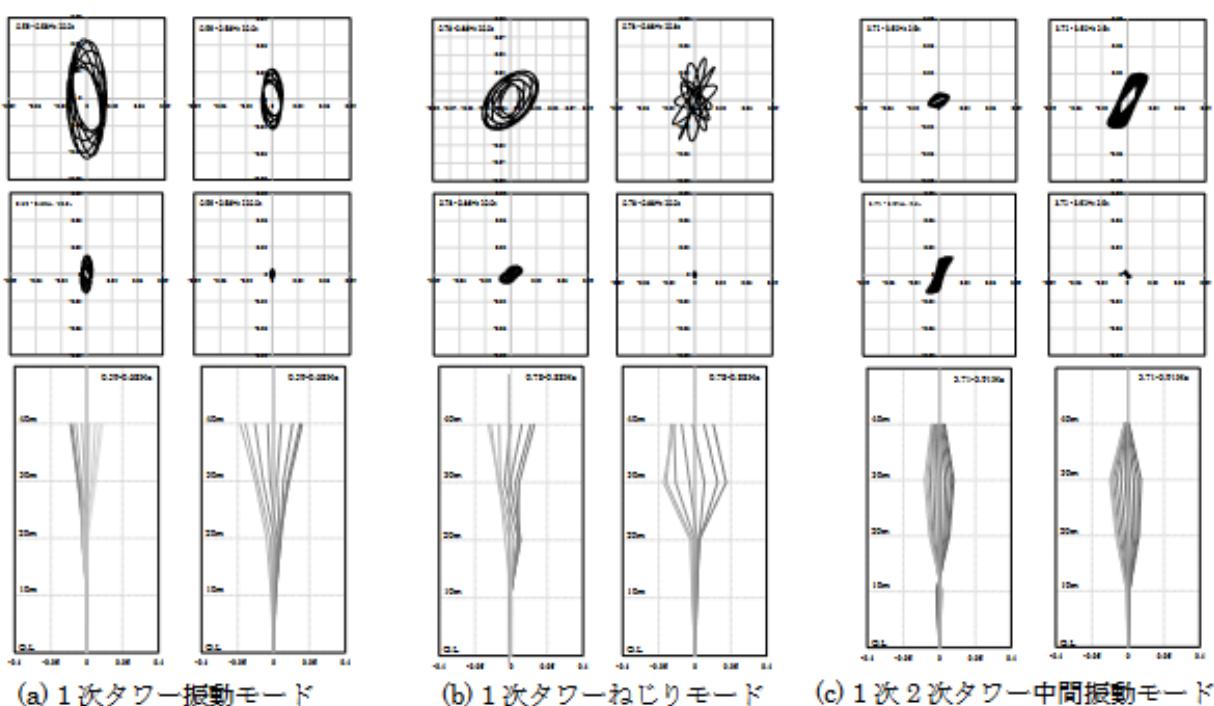
3. リサージュ線図, 変形図による振動の可視化

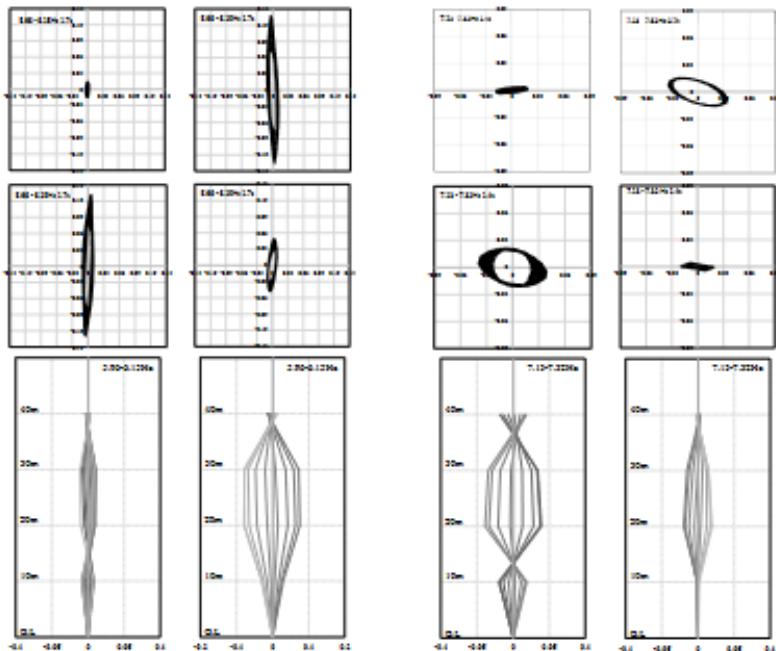
これまでに示した振動を可視化し, 振動モードの確認を行う. 本章では, Bin 9 の各ゲインの増大部分を抽出してタワー10m 間隔のタワー変形図および, リサージュ線図を図 8 に示す. まず, 1 次のタワー振動モードである 0.59Hz から 0.68 のバンド幅を持たせた IFFT 結果を(a)に示す. 左上から 40m リサージュ, 右上 30m リサージュ, 左中 40m リサージュ, 右中 30m リサージュ, 左下 210 度方向タワー変形図, 右下 300 度タワー変形図となっている. (a)の 1 次のタワー曲げ振動モード変形はオイラー・ペルヌーイ梁の特性のようなきれいな 1 次モードになっており, リサージュ線図は若干梢円形となっている. 梢円形となっている理由は近傍にタワーねじりモードが存在しているための影響, 偏芯による影響の 2 種類が考えられるが本図からの推測では偏芯の影響が含まれているものと考える. (b)には 0.78Hz から 0.88Hz のバンド幅を持たせた 1 次タワーねじり振動モードのリサージュ・変形図を示す. 変形図から見ると 20m 位置で位相が大きくずれていることからタワーのねじれていることが確認できる. 変形図はシャンパングラスのような形状となりリサージュはわずかに梢円形状となっている. 通常, ねじりモードは x 方向 y 方向に膨らまないため近傍の曲げモードが分離しきれずに影響しているものと考える.

(c)はゲインの増大があるが振動モードではなく 1 次, 2 次の曲げモード, 偏芯が重畠したものとなっており, リサージュの形状は平行四辺形の形状となるような回転変形となっている. (d)の 2 次のタワー曲げ振動モードでは 20m, 30m の振幅が大きくなっているが, 位

相が反転する位置がオイラー・ペルヌーイ梁の特性とは異なる。これは、ナセル内に重量物(負荷質量)があるため反転位置が上方に移動していることによる。リサーチュ線図をみると変形は主流方向にだけ発生しているため偏芯による遠心力ではなく風の影響を強く受けていることが分かる。図には示していないが変形が円運動となる場合は無風ヨー回転時のタワーに円周方向に働く励振力が加わった場合にきれいな円運動をする。(e)は210度方向が2次のタワー曲げ振動モード、300度方向が3次のタワー曲げ振動モードが表れていることから両モードの中間的な連成振動と考える。以上の変形図、リサーチュ線図からも明らかのように(a),(b)のような重根に近い振動モードや中間的な位置にゲインの増大がある場合等、振動モード形態を3次元的に可視化することでモード分離が可能であることを示せた。

4. 震度表との比較





(d) 2次タワー振動モード

(e) 2次 3次タワー中間振動モード

図8 リサージュ線図・変形図

表1 タワー40m位置における震度

風速	gal		震度	
	X	Y	X	Y
Bin4	10.96	12.61	3	3
Bin5	10.72	9.04	3	3
Bin6	22.51	12.51	4	3
Bin7	26.66	16.45	4	3
Bin9	26.92	25.25	4	4

この論文では、振動の励振源として、①～⑤が挙げられていた。

つぎに、振動の励振源¹⁾⁽²⁾⁽³⁾を考えると①風力によりブレードが励起される振動、②ブレード質量のアンバランスによる振れ回り振動、③発電機が発する振動、増速器ギヤによる振動、④ヨーブレーキによる振動および、ヨー回転によるねじり振動、⑤地震等によるその他の振動があり、ナセル・タワーの振動形態は一義的に決まっても励振力により多様な連成振動形態が予想される。本報告では、ナセル・タワーが励起される連成振動のモード分離・解析を行うことを目的とし、ナセル内ロータ近傍に傾斜センサおよび、ナセル内梁に加速度センサ、タワー内壁面に加速度センサを設置してセンサ出力からナセル・タワーの振動特性を明らかにする。さらに、風によるブレード振動ロータ周りの振れ回り、タワー特有の振動モード形状について明らかにすると共に、タワー・ナセル内で発生する振動を震度表に当てはめ評価を行う。

2. 振動発生メカニズム

風力発電システムに常時加わる励振力を整理すると以下の5つに分類することができる。

Fin1: 風速がブレードを通過する際にブレードに加わる外力

Fin2: ブレードの偏芯によるふれ回り振動

Fin3: 発電機・増速器ギヤ回転振動

Fin4: ヨーモータ・ヨーブレーキねじり振動

Fin5: その他の振動

各種センサで取得したナセル・タワー振動のFFT解析した結果を示すと図2から図7となる。図2,3は傾斜計のFFTを示しており、図2はロータのローリング、図3はロータピッチングの傾斜角度を示している。

図2,3はBin5(風速4.5~5.5m/s)の場合のFFT解析結果であり、傾斜計の分解能2Hz以下が正確に観測できている。計測設定としては、サンプリング速度1kHz、ハイパスフィルタ0.1Hz、ローパスフィルタ1kHzの設定とした。図2の鉛直方向では0.5Hz, 0.8Hz, 2.7Hz付近にゲインの増大が確認できる。これらのゲインの増大は0.5Hzがロータ回転数に比例した振動、すなわち偏芯振動となっており、0.8Hzが1次のタワーねじり振動モード、2.7Hzがナセルの振動モードとなっている。図3のローリング方向では0.8Hz, 1.6Hz, 2.7Hzにゲインの増大が確認でき、ロータの偏芯が顕著には

現れておらず、代わりに1.6Hzに羽根数×回転数の振動が現れている。これは、上下左右の風速差と羽根数によるブレード変形振動が起因しているものと考える。また、0.7Hzに1次のタワー曲げ振動モードが表れており、0.8Hzのタワーねじり振動モードと同レベルとなっていることが観測でき、タワー振動がブレードに影響していることが分かる。

この、1.6Hzに現れた、羽枚数×回転数の振動は、考察を予定していた、①~⑤では無い。この原因を、
上下左右の風速差と羽根数によるブレード変形振動が起因している。

と説明している。

原因は別として、ナセルのある塔の頂上や塔内40mで1.6Hz（羽枚数×回転数）の振動の振動が起こっていること、は示された。

図4と図5を比較すると、振幅は、ある方向に対して大きく、別の方向に関しては小さいことが分かる。

図6、図7を比べても、同様である。

これが、大気の気圧変動を引き起こす時に、指向性を持った気圧変動を引き起こすことが考えられる。

音叉の指向性と同様に考えるべきです。[音響と振動のアニメーション](#)では指向性について次のように書かれています。

基本モード(426Hz)



振動の基本モードは、チューニングフォークに最も一般的に関連するモードです。フォーク上に周波数が印刷されたモー形状であり、この場合は426Hzである。フォークの2つの歯は交互に互いに接近したり離れたりして移動し、片持ち梁のうに曲がり、ステムに固定され、他端で自由に動く。これは対称モードであり、2つのタインはお互いの鏡像であるからです。

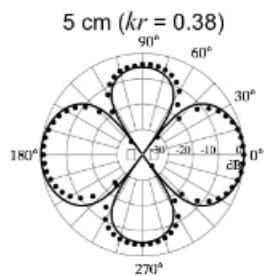
右側のYouTubeムービーは、基本振動モードで振動する125Hz音叉のスローモーション振動(1200fpsでの高速カメラによる撮影)を示しています。

基本モードで振動すると、フォークのステムが静止しているように見えます。しかし、実際には、基本周波数だけでなく、基本周波数の2倍の周波数(この周波数ではフォークの振動モードがない)である第2高調波852Hzで上下に振動します。この茎の動きは非常に小さく、茎の底に指先を置くと感じにくいです。しかし、振動のあるフォークのステムをテーブルトップ、ドア、またはピアノの響板に触れることで効果的に実演することができます。

Tuning Fork Vibration



音叉の基本振動モードは、近距離場と遠方場の放射パターンの間の明確な遷移を持つ
[1] [2,3]
(または線形)四重極音源として音を放射します。左のプロットは、フォーク周囲の角度の関数としての音圧レベルを表す近接場測定指向性パターン(ドット)と、縦方向の四重極の理論モデル(曲線)を示しています。
[2]



佐々木朗

音叉の振動の様子をハイスピードカメラで撮影してみました。上端が左右対称に振動しています（正確には、叩いた最初は左右の動きがずれていますが、次第に同期していっています）。最初は音叉全体の振動の様子を撮影しようと試みたのですが、振動が小さすぎて、振動の様子を表現できませんでした。そこで音叉の上端だけを接写で撮影しました。この映像によると振幅は1/3～1/2mmくらいでしょうか？

https://www.youtube.com/watch?v=_h-J79DXi8

風速は激しく変化します。いくら回転数を安定化させる機能があっても、完全に一定にすることは出来ません。

このナセルでの振動を 10 分間ほど計測したデータに対して、Wavelet 解析をすれば、1.6Hz を中心にして、ブレードが、一定の時間内で塔の前を通過する回数の変化に対応して、微妙に変化することが分かります。

この振動の原因に関しては、疑問があります。

風速の違いでは、風の変化に対応して、周波数が変化すべきです。この計測は、周波数分解能が低いので、このデータからは分かりません。

風の変化そのものでは無くて、ブレードが塔の前を通過する回数がナセルの振動の周波数を決定するのです。しかもそれは、超低周波音の周波数も決定するのです。この様に、周波数が変化するのですから、塔や気柱の固有振動数ではありません。何らなの強制振動と考えるべきです。

8.2.4 強制振動の原因

[風車ナセル・タワーの振動解析](#)では、

れている。210度方向ではロータ回転周波数 0.5Hz が若干表れ、羽根数×回転数 1.6Hz が顕著に表れている。

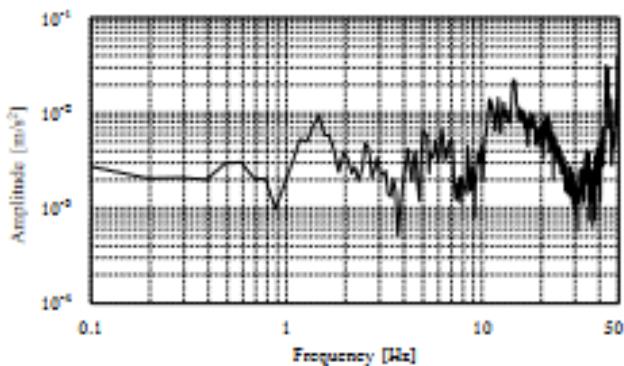


図 4 ナセル内加速度 210 度方向スペクトル

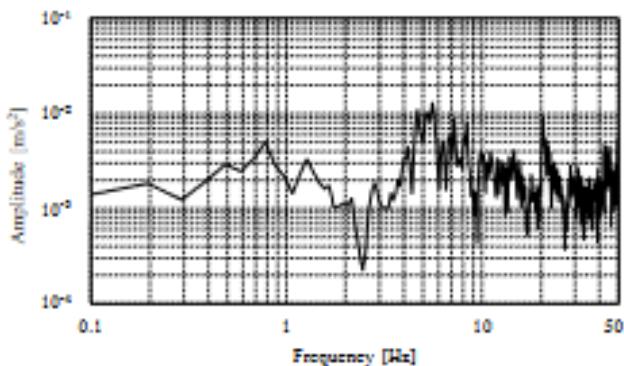


図 5 ナセル内加速度 300 度方向スペクトル

ここで、210度については、塔の中心の真上にあるナセル内の床を原点にとり、回転軸がブレードの方向を向く方向を基準にして、左回りの回転で計測した、角の大きさだと考えます。

この時、 $210+90=300$ ですから、210度方向には大きく揺れるが、それに対する直角方向にはあまり揺れないことがあります。

この原因は、次の論文を見れば分かります。

[風車の振動解析](#)（名古屋大学大学院工学研究科 石田幸男）では

2. 風車における各種の励振力

図2は風車に働く力を示す。左から風による力①が働く。ブレードには相対的な速さ W の風が加わるので、速度 W の方向に抗力 D 、それに直角に揚力 L として働く。これらの力は flapwise 成分②と、chordwise 成分③に分けることができる。風速は高さにより変化するので、ブレードが回転すると、これらの力は周期的に変化する。その結果、ブレードとタワーに周期的励振力が加わる。風下

にブレードがあるタイプでは、tower shadow で風速が弱まり、インパルス状の力④がブレードとタワーに加わる。このパルス列は、フーリエ級数展開すれば、回転速度とその整数倍の振動数成分をもつ。ブレードには重力 mg も作用する。その力のブレードに直角な成分⑤は、ブレードを曲げるモーメントとして作用するが、左側と右側で進行方向に対して変動するため、周期的な曲げモーメントとなる。ブレードの長手方向の成分⑥は、ブレードの張力あるいは圧縮力として働く。この力はブレードが上に来たときには、倒立振り子のようにブレードの剛性を下げ、下に来たときは剛性を上げる。その結果、係数励振作用となる。⑦は不つりあいによる力である。ブレードの枚数が複数になると、ブレードからタワーに加わる力の各振動数成分は、枚数倍となる。以上のように、回転速度の n 倍の振動数 nP をもつ多くの励振力が加わる。

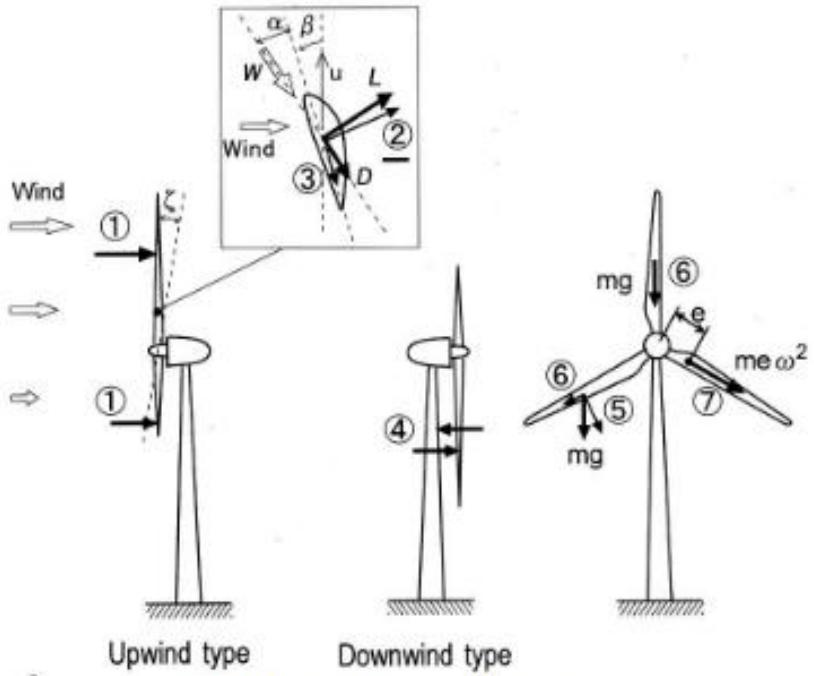
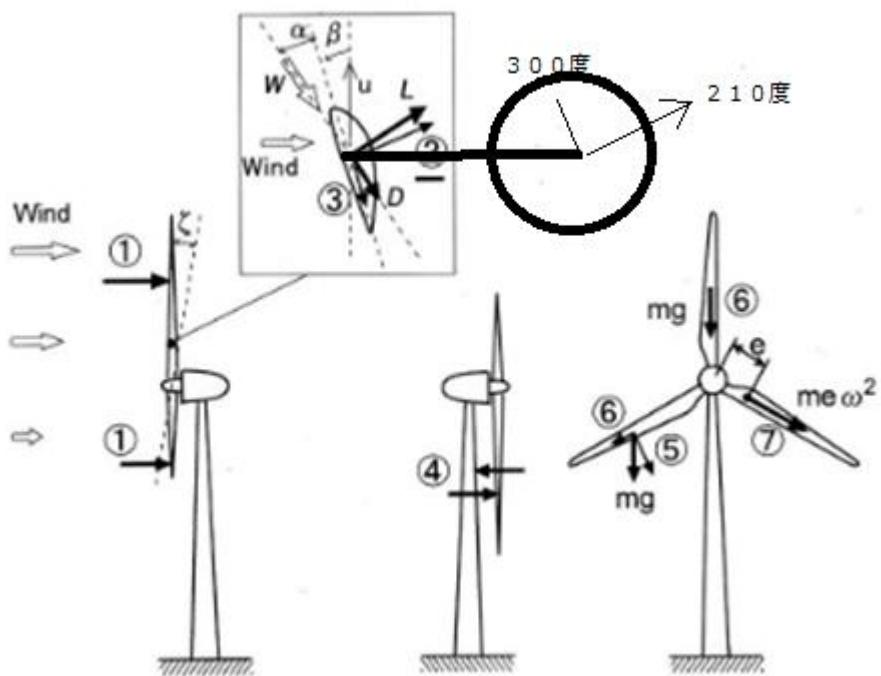


図2 風車に働く各種の力

この記述と、210度方向の振動を重ねると、次の図になります。



となるので、風車は、風下の方向のうち、揚力ベクトルに近い方向に押されて、ナセルの部分は、ブレードが真上に来る周期と同じ周期で、210度方向に大きく振動することになる。
と考えます。

8.2.5 風車音の指向性

風速が風車騒音指向性に及ぼす影響について

(菊島 義弘,長島久敏,橋本 晶太,鯨岡 政斗,濱田幸雄,川端 浩和,小垣 哲也)

によれば、

RION 製 NL62 を風力発電システム周りに 4 台、JIS4) 音響パワー計測用として 1 台使用している。風力発電システム周りを計測する騒音計マイクロホンは、卓越風向(北を 0 度とした 300 度方向)から 90 度ごととし、配置場所は図 1 に示すように 300 度、30 度、120 度および 210 度、タワー中心から 22m の位置に配置している。4 台の騒音計マイクロホンは固定とし、他の角度はナセルが回転することで角度が変化することを利用している。

オーバーオール値は客観的に約 200 度の位置のレベルが高くなっている。この位置はキャンセレーションメカニズムが働きレベルが低下する位置であり指向性の予測とは逆の現象が現れている。

予測と反する結果を調べるために 1/3 オクターブバンド分析結果を調査した。図 6 にはブレード数×回転数(Bin 5 の場合 1.6Hz) の分布図を示す。図中の凡例は風速差を表している。ブレードの回転騒音が主音源である 1.6Hz では、オーバーオール値と同じような傾向を示しており、約 200 度の位置で L_{eq} が最大となっている。回転騒音はブレードが振り下ろされる位置が最大値となっており、マイクロホンに対し旋回流からの騒音、回転方向に流れる騒音が重畠され、 L_{eq} が増大しているものと考える。逆に降り上る方向の L_{eq} は最小となっている。

5. 結 言

風速の影響による指向性特性調査を行い、1/3 オクターブバンド分析することで以下の知見を得た。

- 1) 低周波数では旋回流の影響と思われる騒音によりブレード振り下ろし面の騒音が増大することを示した。
- 2) 中型風力発電システムではブレードのキャンセレーションメカニズムは 1kHz 周辺にだけに発生していることが確認でき、正面、側面のレベル差は約 20dB、音響パワーとして 1/100 まで減少していることを示した。
- 3) 指向性特性は、風速の影響を受け、ブレード前方の L_{eq} よりもブレード後方の L_{eq} レベルが下がることを示した。上述の結果から風力発電システムの音響放射特性は全方向に対して一様ではないことが分かった。

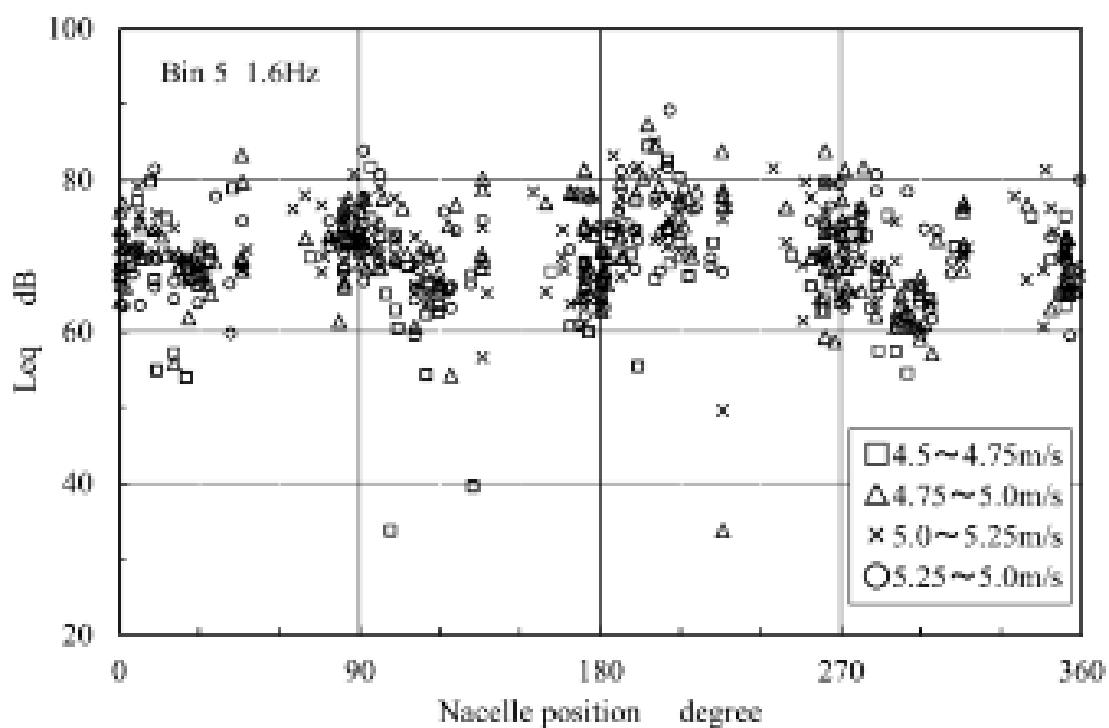


図 6 Bin 5 中心周波数 1.6Hz の指向性分布

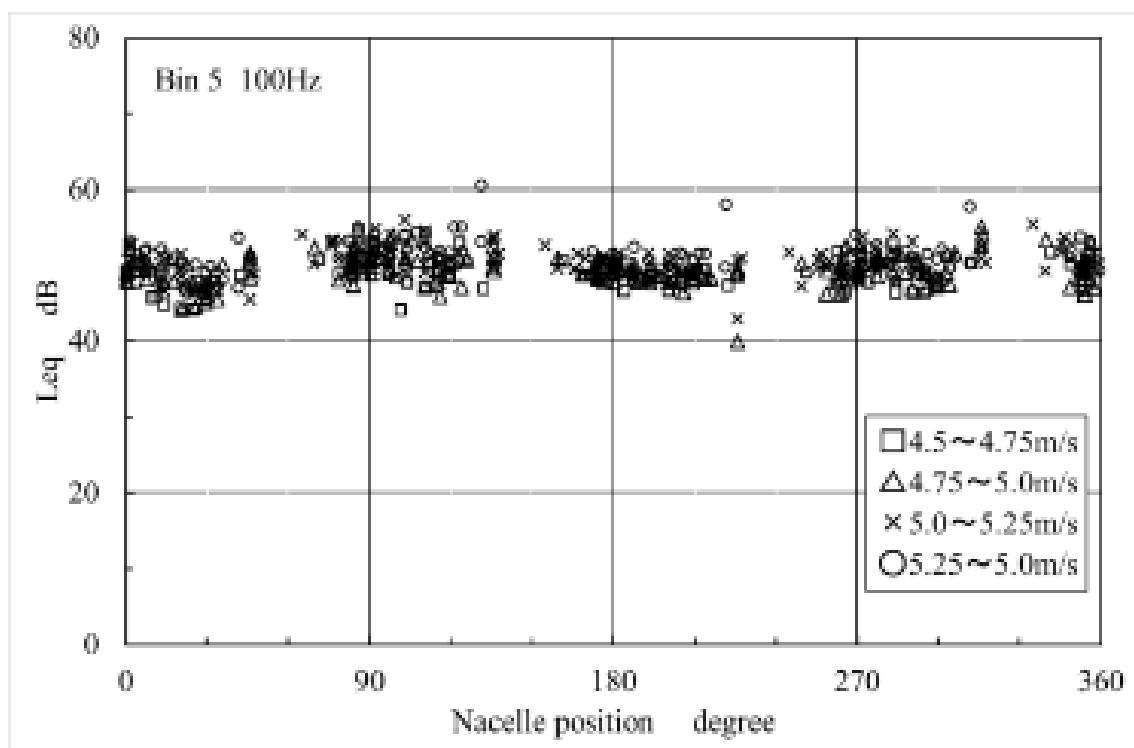


図 7 Bin 5 中心周波数 100Hz の指向性分布

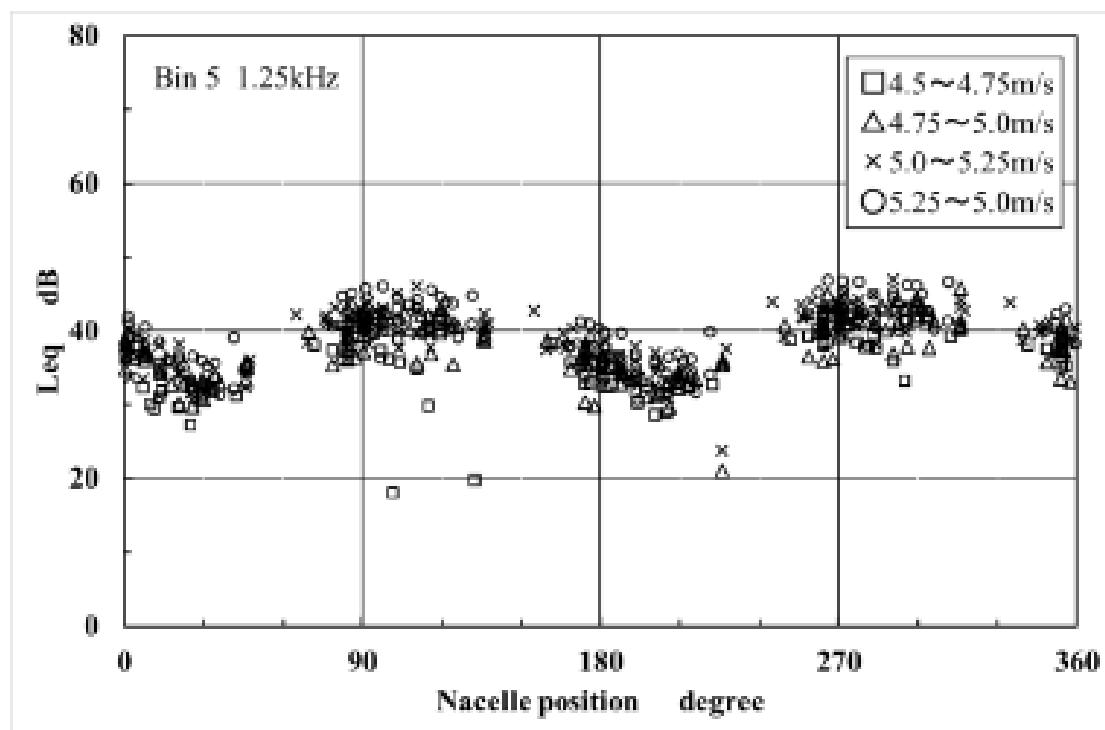


図8 Bin 5 中心周波数 1.25kHz の指向性分布

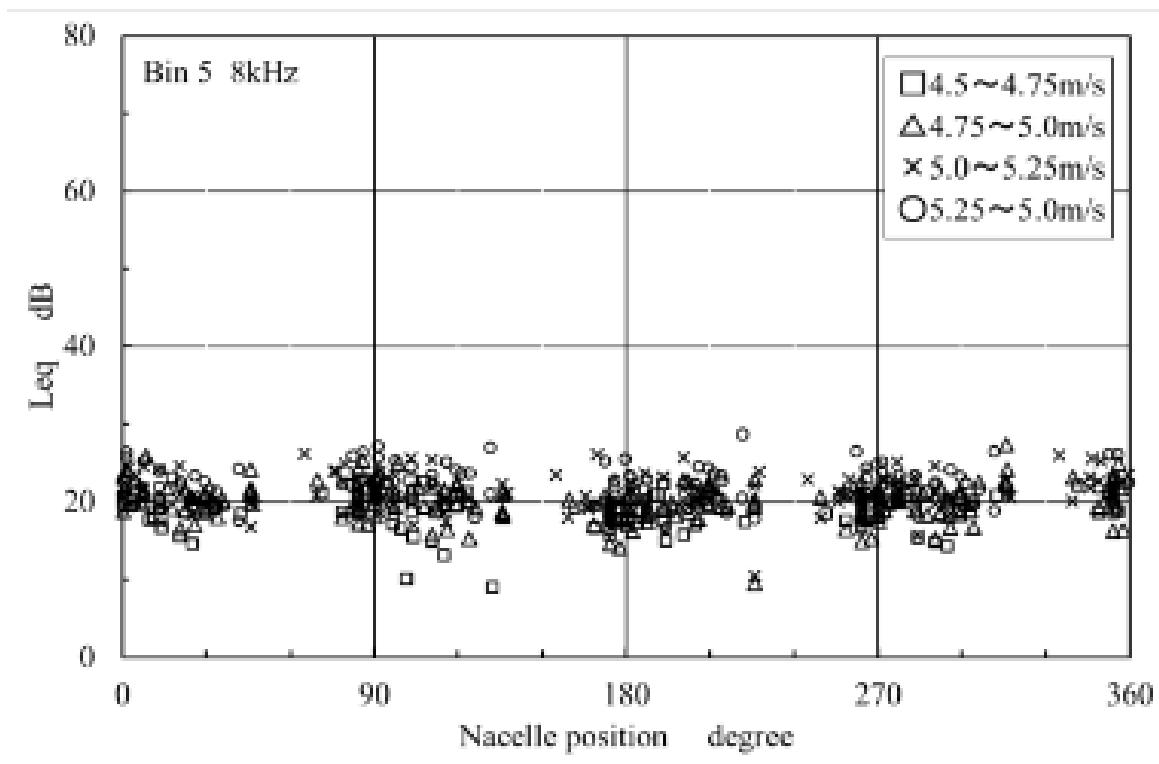


図9 Bin 5 中心周波数 8kHz の指向性分布

ここでは、音圧レベルが示されているが、音圧(パスカル値)に変換してみると

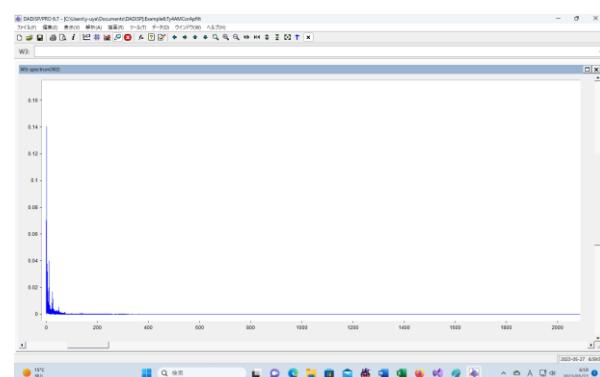
\$B\$4*10^(C4/20)			
dB	Pa		
100	2.0000		
95	1.1247		
90	0.6325		
85	0.3557		
80	0.2000		
75	0.1125	*	1.6Hz
70	0.0632		
65	0.0356		
60	0.0200		
55	0.0112		
50	0.0063	*	100Hz
45	0.0036		
40	0.0020	*	1250Hz
35	0.0011		
30	0.0006		
25	0.0004		
20	0.0002	*	8000Hz

1.6Hz では、75dB、100Hz では 50dB 程度です。

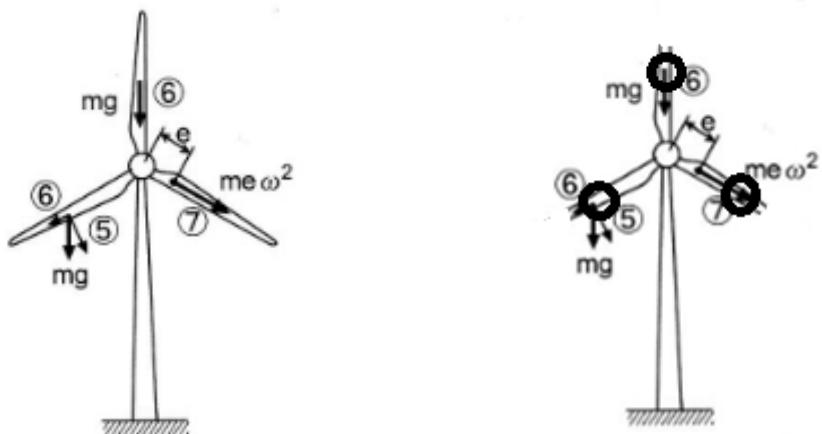
これをパスカル値に直せば、0.1125Pa と 0.0063Pa です。17.86 倍です。聴覚での議論だけならこのdB でもある程度役に立つのですが、ガタツキの話をするときは、物理的な力として考えるべきなのです。

ここでの数値は、私が計測した風車音の特徴とおおむね一致しています。

パスカルからデシベル		
P0	0.00002	
Pa	dB	
0.14	76.90	0.8Hz
0.04	66.02	10Hz
0.02	60.00	23Hz
0.005	47.96	50Hz
0.0004	26.02	100Hz



8.2.6 上空の風と地表近くの風



揚力の話はあとで詳しく考えるとして、揚力ベクトルの成分で、回転軸の方向への成分を考えます。

単純化して、塔の高さは 100m、ブレードの代わりに、丸い標識のような形の板が中心から 50m の所に付いていると考えます。

この時、円盤の地上からの高さは

$$100 + 50 * \sin(\omega t + \theta)$$

で計算されます。

風車の塔は横から見ると長方形に見えて、取り付けた板は丸く見えます。風が真横から当たるときには、平らな板と丸い塔では違いが出ます。

風力係数は、投影面積に対しての割増（割引）の値です。物の形状が複雑になればなるほど、風力係数は大きな値が設定され、同じ投影面積でも加わる荷重が増大する。「空気抵抗」とも言われる。

従って、風速 40m/s における標識板（風力係数:1.2）と丸鋼管（風力係数:0.7）の風荷重を比較すると

空気密度を 1.23 kg/m^3 とすると

$$P = (V^2 / 2) \times 1.23 \times Cd \text{ より}$$

P: 風荷重 [N/m²] 、V: 風速 [m/s] 、Cd: 風力係数

$$\cdot \text{標識板 } P = 40^2 / 2 \times 1.23 \times 1.2 = 1181 \text{ [N/m}^2\text{]}$$

$$\cdot \text{丸鋼管 } P = 40^2 / 2 \times 1.23 \times 0.7 = 689 \text{ [N/m}^2\text{]}$$

となり、同じ投影面積であっても風荷重の算出においては

標識板/丸鋼管 ≈ 1.7 で 1.7 倍の差がある。

上空では地表近くよりも強い風が吹きます。これに関しては、次のような予測式があります。

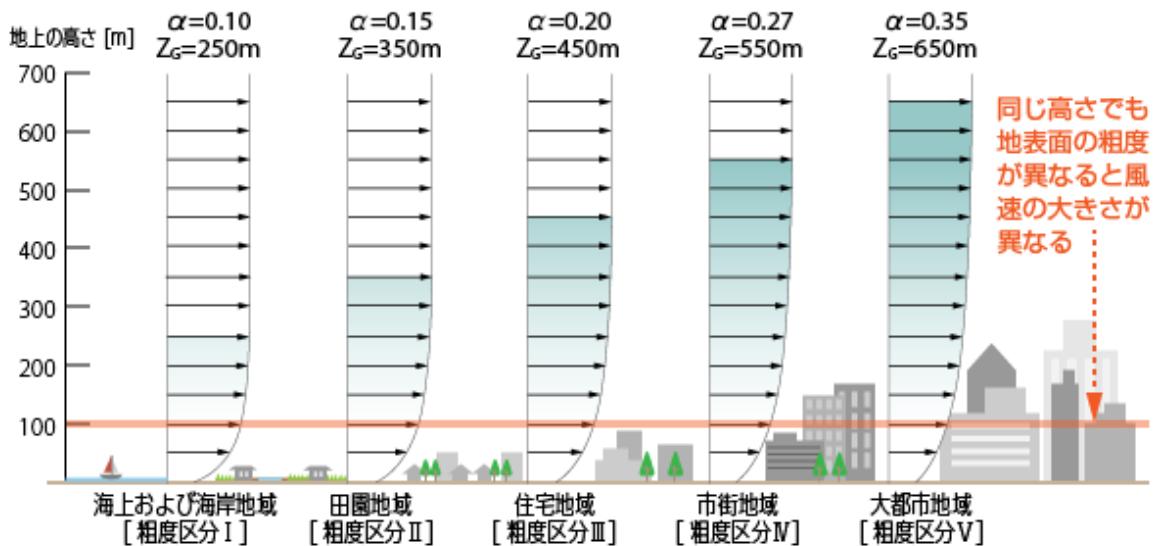
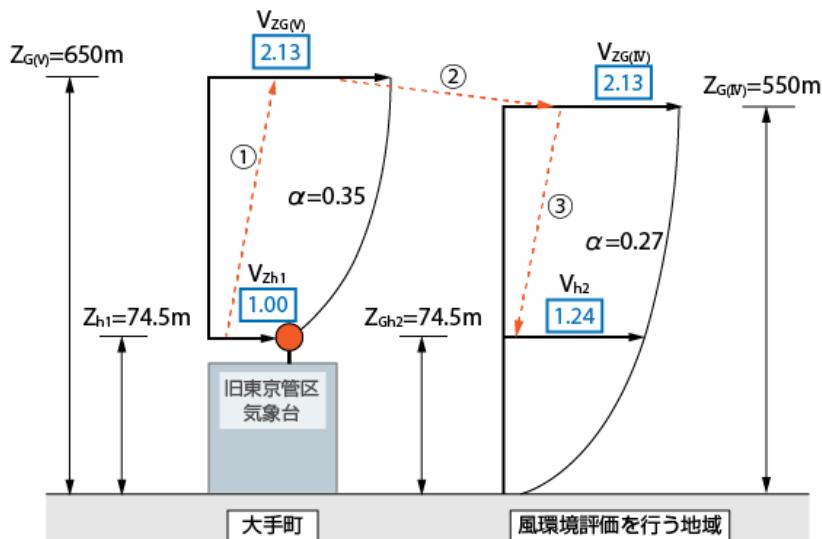


図2 平均風速の鉛直プロファイル

1) 大手町観測所（風速設計置高さ： $Z_{h1}=74.5\text{m}$ ）の風速を1.00とし、地表面粗度区分Vに応じたべき指数 $\alpha(v)$ ($=0.35$) により境界層高さ $Z_{G(V)}$ ($=650\text{m}$) の風速 $V_{ZG(V)}$ を(1)式より算出する。

$$V_{ZG(V)} / V_{zh1} = (Z_{G(V)} / Z_{h1})^{\alpha(v)} \dots (1)$$

$$V_{ZG1(V)} = 1.00 \times (650/74.5)^{0.35} = 2.13$$



$$V_{ZG(V)} / V_{zh1} = (Z_{G(V)} / Z_{h1})^{\alpha(v)} \dots (1)$$

$V_{zh1}=1$ とすると、

$$V_{ZG1(V)} = 1.00 \times (650/74.5)^{0.35} = 2.13$$

この式を使えば、地上 74.5mでの風速が 12m/s の時には、大都市地域では $\alpha = 0.35$ であり、地上 650mでの風速は、 $12 \times 2.13 = 12 \times (650/74.5)^{0.35} = 12 \times 2.13 = 25.56\text{m/s}$ となります。

田園地域で、地上 10m の時の風速が 7m/s のときは、

地上 $100+50*\sin(\omega t + \theta)$ での風速は

$$7 * ((100 + 50 * \sin(\omega t + \theta)) / 10)^{0.15}$$

となります。

標識の面積を 10 m² とすれば、

空気密度を 1.23 kg/m^3 とすると、風速 40m/s のときは、

$$P = (V^2 / 2) * 1.23 * C_d \quad \text{より}$$

P : 風荷重 [N/m²] 、 V : 風速 [m/s] 、 C_d : 風力係数

$$\cdot \text{標識板 } P = 40^2 / 2 * 1.23 * 1.2 = 1181 \text{ [N/m}^2]$$

より、地上 10m で 7m/s の風が吹くときに、風車に取り付けてある丸い板にかかる力は、

$$P = \frac{\left(7 * \left(\frac{(100 + 50 * \sin(\omega t + \theta))}{10} \right)^{0.15} \right)^2}{2} * 1.23 * 1.2 * 10 \text{ [N]}$$

となります。

この力によって引き起こされる風車を後ろに倒そうとする力は、回転軸を地表とブレードの回転面の共有する直線としたときの回転モーメントであり、

$$P * (100 + 50 * \sin(\omega t + \theta)) = k * (100 + 50 * \sin(\omega t + \theta))^{1.3}$$

となります。

定数 k は実際の風車について計算する必要があるのですが、

この場合には、

$$\frac{\left(7 * \left(\frac{1}{10} \right)^{0.15} \right)^2}{2} * 1.23 * 1.2 * 10 = 181.2393273$$

となります。

ここでは

$$(100 + 50 * \sin(\omega t + \theta))^{1.3}$$

の部分だけを考えることにします。

ブレードのなす角は $2\pi/3$ ラジアンなので、回転モーメントの合計は、

$$\omega = 2\pi * 0.8/3$$

$$f(t) = \{100 + 50 \sin(\omega t)\}^{1.3}$$

$$+ \{100 + 50 \sin(\omega t + 2\pi/3)\}^{1.3}$$

$$+ \{100 + 50 \sin(\omega t + 4\pi/3)\}^{1.3}$$

と置いたときに、

$$M = k * f(t) = 181.2393273 * f(t)$$

となります。

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

というマクローリン展開の公式を使って、近似計算をします。

$$\{100+50\sin(\omega t)\}^{1.3} = (100^{1.3})(1+(1/2)\sin(\omega t))^{1.3}$$

に注意して上の式の \times に $(1/2)\sin(\omega t)$ を代入します。

マクローリン展開して

$$\{100+50\sin(\omega t)\}^{1.3}$$

$$\approx 100^{1.3}\{1+(1.3/2)\sin(\omega t)+(1.3 \cdot 0.3/8)\sin^2(\omega t)$$

$$+(1.3 \cdot 0.3 \cdot (-0.7)/48)\sin^3(\omega t)+\dots\}$$

$$\approx 398.1071705\{1+0.65\sin(\omega t)+0.04875\sin^2(\omega t)$$

$$-0.0056875\sin^3(\omega t)+\dots\}$$

他も同様となり、

$$f(t) \approx 3*398.1071705 + 398.1071705*0.04875 \cdot (3/2) + 398.1071705*0.0056875(3/4)\sin(3\omega t)$$

$$\approx 1194.321511 + 29.11158684 + 1.698175899\sin(3\omega t)$$

$$\approx 1223.433097 + 1.698175899\sin(3\omega t)$$

となって、微小項を無視すれば3倍角の成分のみとなる。

よって、

$$M=k*f(t) = 181.2393273*(1223.433097 + 1.698175899\sin(3\omega t)) = 221734.1914 + 307.7762575\sin(3\omega t)$$

となります。

計算

$$\sin(\omega t) + \sin(\omega t + 2\pi/3) + \sin(\omega t + 4\pi/3) = 0$$

$$\sin^2(\omega t) + \sin^2(\omega t + 2\pi/3) + \sin^2(\omega t + 4\pi/3) = 3/2$$

つぎに

$$\sin^3 x = (3\sin x - \sin 3x)/4$$

だから、 \sin の3乗の和のうち、 $\sin x$ の和は0となり、 $\sin 3x$ の和は

$$\sin(3x) + \sin(3(x+2\pi/3)) + \sin(3(x+4\pi/3)) = 3\sin(3x)$$

となるから

$$\sin^3(\omega t) + \sin^3(\omega t + 2\pi/3) + \sin^3(\omega t + 4\pi/3) = -(3/4)\sin(3\omega t)$$

となる。

3枚のブレードが、 $\sin(\omega t)$ 、 $\sin(\omega t + 2\pi/3)$ 、 $\sin(\omega t + 4\pi/3)$ に従って回転している場合には、塔にかかる力は

$$M = k*f(t) = 221734.19 + 307.78\sin(3\omega t)$$

となり、ブレードの回転周期の $1/3$ の周期で塔にかかる力が変化することが分かります。

ブレードが、 $\sin(\omega t)$ で回転すれば、塔にかかる力は $\sin(3\omega t)$ の定数倍で変化するのです。

ブレードの回転周波数が、 $0.26666 = 0.8/3\text{Hz}$ ならば、塔にかかる力の周波数は 0.8Hz になります。

もし、上空と地上の風速が同じならば、上空での風速を表す式は
田園地域で、地上 10m の時の風速が 7m/s のときは、

地上 $100 + \sin(\omega t + \theta)$ での風速は

$$7 * (100 + 50 * \sin(\omega t + \theta))^0 = 7$$

となり、

$$\begin{aligned} f(t) &= \{100 + 50 \sin(\omega t)\}^1 \\ &\quad + \{100 + 50 \sin(\omega t + 2\pi/3)\}^1 \\ &\quad + \{100 + 50 \sin(\omega t + 4\pi/3)\}^1 \\ &= 300 \end{aligned}$$

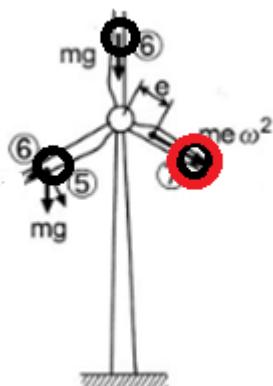
$$P = \frac{((7)^2)}{2} * 1.23 * 1.2 * 10 = 361.62 [N]$$

$$M = 361.62 * f(t) = 362.12 * 300 = 108486$$

となり、回転モーメントの変動はありません。

この場合は、塔は傾くだけですから、振動による超低周波音の発生はありません。

次に、ブレードの 1 枚だけが他の 2 枚よりも少し大きい場合を考えます。



赤い丸印の部分の面積が、 $10 * 1.003 = 10.03 \text{ m}^2$ だとします。

この時、赤い丸の部分が受ける力は、

$$\begin{aligned} P &= \frac{\left(\left(7 * \left(\frac{(100 + 50 * \sin(\omega t + \theta))}{10} \right)^{0.15} \right)^2 \right)}{2} * 1.23 * 1.2 * 10 * 1.003 [N] \\ &= \frac{\left(\left(7 * \left(\frac{(100 + 50 * \sin(\omega t + \theta))}{10} \right)^{0.15} \right)^2 \right)}{2} * 1.23 * 1.2 * 10 * 1 \\ &\quad + \frac{\left(\left(7 * \left(\frac{(100 + 50 * \sin(\omega t + \theta))}{10} \right)^{0.15} \right)^2 \right)}{2} * 1.23 * 1.2 * 10 * 0.003 \end{aligned}$$

より、

$$P * (100 + 50 * \sin(\omega t + \theta)) = k * ((100 + 50 * \sin(\omega t + \theta))^{1.3} + 0.03 * (100 + 50 * \sin(\omega t + \theta))^{1.3})$$

となるので、 $f(t)$ の代わりに、

$$\begin{aligned}g(t) &= \{100+50\sin(\omega t)\}^{1.3} \\&+ \{100+50\sin(\omega t+2\pi/3)\}^{1.3} \\&+ \{100+50\sin(\omega t+4\pi/3)\}^{1.3} \\&+ 0.003 \cdot \{100+50\sin(\omega t)\}^{1.3}\end{aligned}$$

を考えることになります。

$$\begin{aligned}f(t) &\approx 1223.43 + 1.698\sin(3\omega t) \\&\{100+50\sin(\omega t)\}^{1.3} \\&\approx 100^{1.3} \{1 + (1.3/2)\sin(\omega t) + (1.3 \cdot 0.3/8)\sin^2(\omega t) \\&\quad + (1.3 \cdot 0.3 \cdot (-0.7)/48)\sin^3(\omega t) + \dots\} \\&\approx 398.1 \{1 + 0.65\sin(\omega t) + 0.04875\sin^2(\omega t) \\&\quad - 0.0056875\sin^3(\omega t) + \dots\} \\0.003 \cdot \{100+50\sin(\omega t)\}^{1.3} \\&= 0.003 \cdot 398.1 \{1 + 0.65\sin(\omega t) + 0.04875\sin^2(\omega t) \\&\quad - 0.0056875\sin^3(\omega t) + \dots\}\end{aligned}$$

ここで、

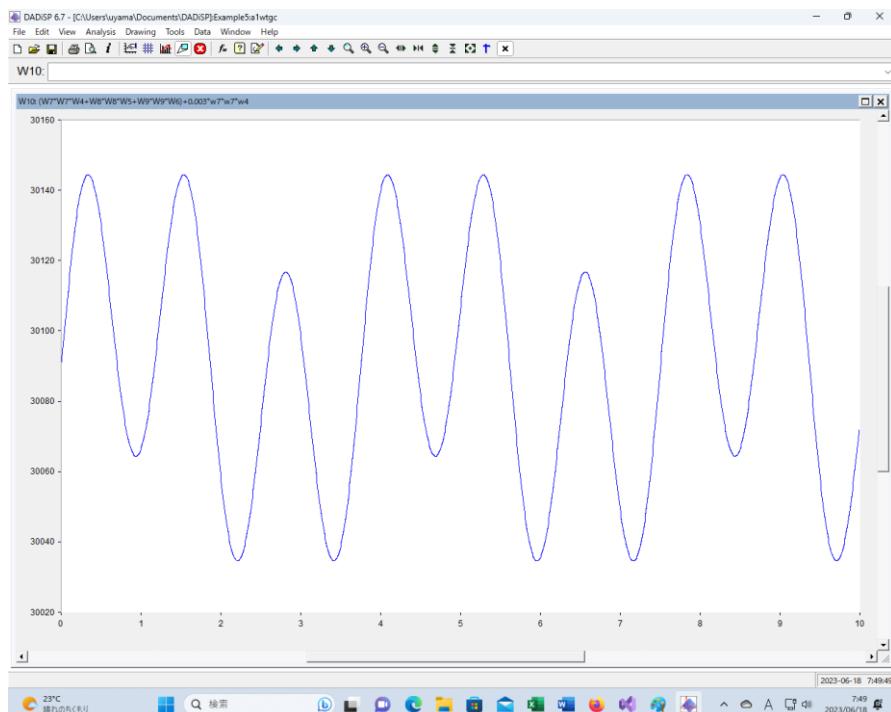
$$\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$$

$$\sin^3 x = (3\sin x - \sin 3x)/4$$

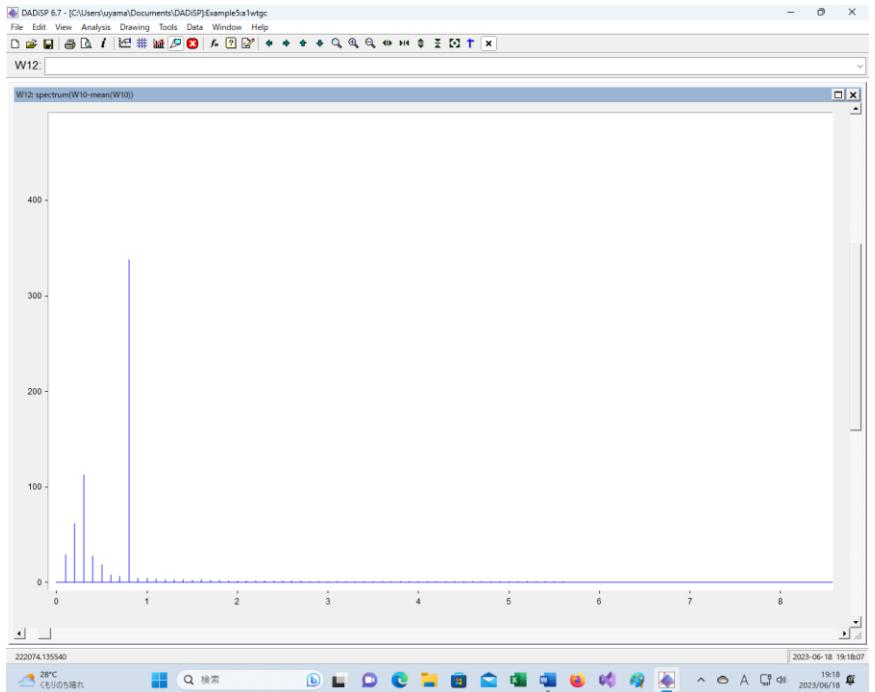
より、

$$\begin{aligned}g(t) &\approx 1223.43 + 1.69814512\sin(3\omega t) \\&+ 1.194 \{1 + 0.65\sin(\omega t) + 0.04875(0.5 - 0.5\cos(2\omega t)) - 0.0056875(3\sin(\omega t) - \sin(3\omega t))\}/4 \\&= 1224.653 + 0.771\sin(\omega t) - 0.0291\cos(2\omega t) + 1.699842838\sin(3\omega t) \\M = k \cdot g(t) &= 181.24 * (1224.653 + 0.771\sin(\omega t) - 0.0291\cos(2\omega t) + 1.699842838\sin(3\omega t)) \\&= 221956.1097 + 139.736\sin(\omega t) - 5.274 \cos(2\omega t) + 308.0795159\sin(3\omega t)\end{aligned}$$

グラフは、 $(W7 \cdot W4 + W8 \cdot W5 + W9 \cdot W6) + 0.003 \cdot w7 \cdot w4$ より、



となり、



これで、グラフの、0.2667Hz 成分 0.5334Hz 成分と 0.8Hz の成分が出現する理由が分かりました。

さて、次のような公式があります。

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \cdots (3.1)$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4} \cdots (3.2)$$

$$\sin^4 \alpha = \frac{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{8} \cdots (3.3)$$

$$\sin^5 \alpha = \frac{10 \sin \alpha - 5 \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{16} \cdots (3.4)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \cdots (3.5)$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{4} \cdots (3.6)$$

$$\cos^4 \alpha = \frac{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{8} \cdots (3.7)$$

$$\cos^5 \alpha = \frac{10 \cos \alpha + 5 \cos 3\alpha + \cos 5\alpha}{16} \cdots (3.8)$$

ここで

$$\sin^n x$$

について調べてみます。

仮定 ; $(\sin x)^n$ は、定数と $\sin(mx)$ 、 $\cos(mx)$ ($m=1 \sim n$) の一次式で表現できる。

$n=1$ の場合は、 $(\sin x)^1 = \sin(1x)$ と書けるので正しい。

$n=k$ の時に成立すると仮定すると、

$$(\sin x)^{k+1} = f_k(x) * \sin x \quad , \quad (f_k(x) \text{ は仮定を満たす式})$$

定数 * $\sin x$ は条件を満たす。

$$\sin(mx) * \sin x = -(\cos(mx + x) - \cos(mx - x))/2$$

$$\cos(mx) * \sin x = (\sin(x + mx) + \sin(x - mx))/2$$

となるので、

$$f_k(x) * \sin x$$

は、定数と $\sin(mx)$ 、 $\cos(mx)$ ($m=1 \sim n+1$) の一次式で表現できる。

となるので、仮定は正しい。

$$(\sin x)^n = f_n(x) = c_n + \sum_{m=1}^n a_m \sin(mx) + \sum_{m=1}^n b_m \cos(mx)$$

さて、 $(\sin x)^n + (\sin(x + \frac{2\pi}{3}))^n + (\sin(x + \frac{4\pi}{3}))^n$

を考えるには、1次式での和

$$\sin(mx) + \sin\left(m(x + \frac{2\pi}{3})\right) + \sin\left(m(x + \frac{4\pi}{3})\right)$$

$$\cos(mx) + \cos\left(m(x + \frac{2\pi}{3})\right) + \cos\left(m(x + \frac{4\pi}{3})\right)$$

$m=3k$ 、 $m=3k+1$ 、 $m=3k+2$ ($k=0, 1, 2, \dots$)

の場合に分けて考える。

$m=3k$ の場合は、

$$\sin(3kx) + \sin\left(3kx + \frac{6\pi k}{3}\right) + \sin\left(3kx + \frac{12\pi k}{3}\right) = 3 * \sin(3kx)$$

$$\cos(3kx) + \cos\left(3kx + \frac{6\pi k}{3}\right) + \cos\left(3kx + \frac{12\pi k}{3}\right) = 3 * \cos(3kx)$$

$m=3k+1$ の場合は、

$$\sin((3k+1)x) + \sin\left((3k+1)x + \frac{6\pi k + 2\pi}{3}\right) + \sin\left((3k+1)x + \frac{12\pi k + 4\pi}{3}\right) = 0$$

$$\cos((3k+1)x) + \cos\left((3k+1)x + \frac{6\pi k + 2\pi}{3}\right) + \cos\left((3k+1)x + \frac{12\pi k + 4\pi}{3}\right) = 0$$

$m=3k+2$ の場合は、

$$\sin((3k+2)x) + \sin\left((3k+2)x + \frac{6\pi k + 4\pi}{3}\right) + \sin\left((3k+2)x + \frac{12\pi k + 8\pi}{3}\right) = 0$$

$$\cos((3k+2)x) + \cos\left((3k+2)x + \frac{6\pi k + 4\pi}{3}\right) + \cos\left((3k+2)x + \frac{12\pi k + 8\pi}{3}\right) = 0$$

となるので

$$f_n(x) + f_n(x + 2\pi/3) + f_n(x + 4\pi/3)$$

は、定数と $\sin(3mx), \cos(3mx)$ のような形の項だけが残る。

これが、0.8Hzより大きな周波数、1.6Hz、2.4Hz、3.2Hz、4.0Hzでのピーク値の理由です。

マクローリン展開で展開式を長くしても、 $\sin(3mx)$, $\cos(3mx)$ の項だけが残るのです。

塔には、ブレードの揚力による力のほかに、塔自体に吹き付ける風の力もあって風下に向かって少し曲がります。

ブレードの揚力の分は、塔にかかる力を周期的に変動させます。

この力は、

3枚のブレードが均等な場合でも、

$3*R/60$ [Hz]のほかに、 $2*3*R/60$ [Hz], $3*3*R/60$ [Hz], $4*3*R/60$ [Hz], ...

のような周波数を含んでいます。

さらに、1枚のブレードが少し大きかったり、風に対する角度が他の2枚と少しだけ異なる場合には、風車にかかる力には、

$R/60$ [Hz]のほかに、 $2*R/60$ [Hz], $3*R/60$ [Hz], $4*R/60$ [Hz],

のような周波数成分も含まれることになります。

このような周期的に変化する力が加わった場合の塔の側面の様子については、次の論文を見れば分かります。

円筒の弾塑性純曲げ崩壊に関する研究

陳 珮□ 増田健一 尾崎伸吾

によれば、

円筒の塑性曲げに伴う扁平の特徴 図に、肉厚の円筒について、塑性降伏が生じないよう降伏応力を十分大きい値に設定して求めた、最大曲げモーメントが生じるまでの、円筒断面の縦方向半径の短縮および横方向半径の広がり（とはそれぞれ、扁平に伴う円筒断面の横方向と縦方向の半径である）と軸方向の曲率（中心軸の曲率）の関係を示す。図には、比較のため円筒の弾性曲げに対する理論解析の結果も示している。図からわかるように、曲げ曲率が小さいときは両者はよく一致し、本研究の解析の有効性は確認される。なお、がある程度大きくなると両者の差は現れるが、それはの理論解析において、円筒の扁平に伴う変位などを十分小さい値としそれらの積などの項を省略した近似手法によるものと考えられる。たとえば、図に示すように、のとき、またはは約であり、もしそれに対応する半径方向の変位を無限小の値としてそれらの積などを省略すると、オーダーの誤差が生じる可能性があることは予想できる。また、図からわかるように、曲げ曲率が小さいときはであるが、の増加に伴い、となる。以下、円筒の扁平を表す指標としてをで除して無次元化した値を用いて検討を行う。

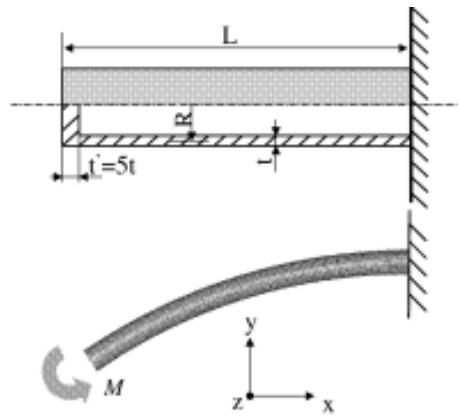
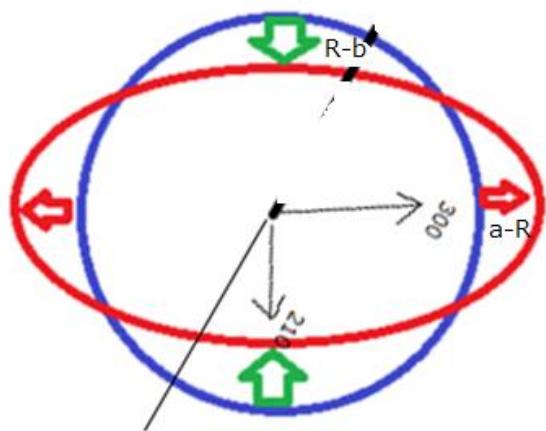


Fig. 1 Tube geometry and loading condition



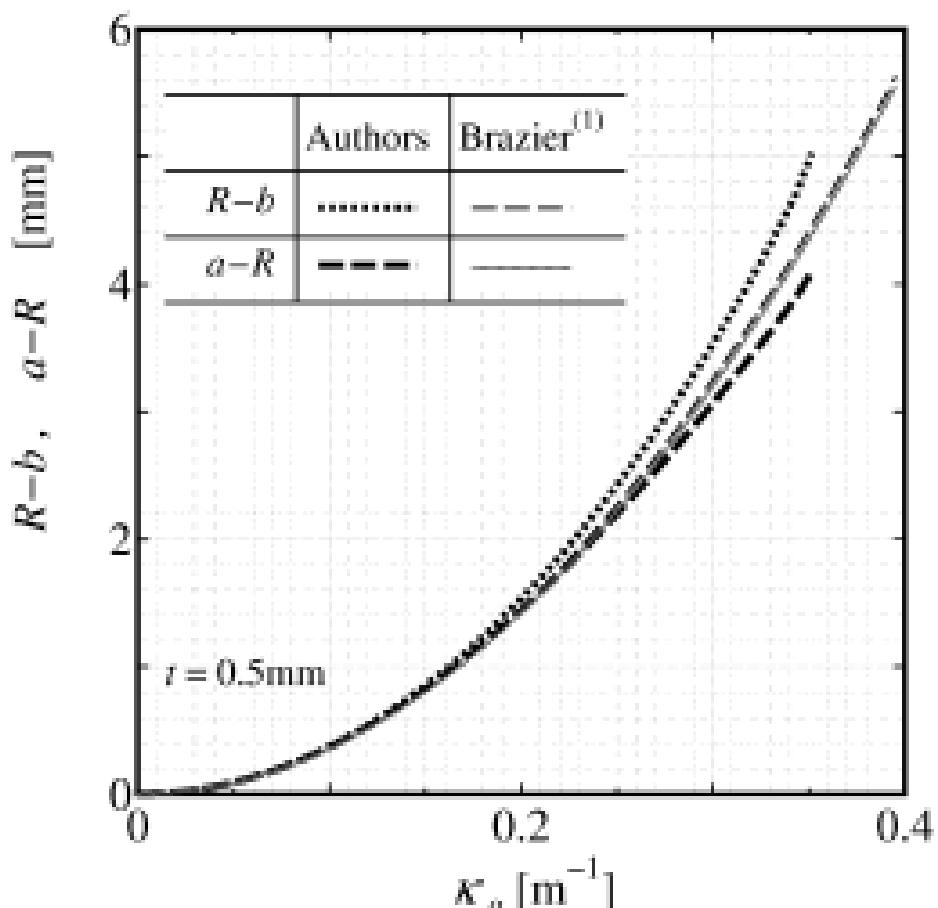
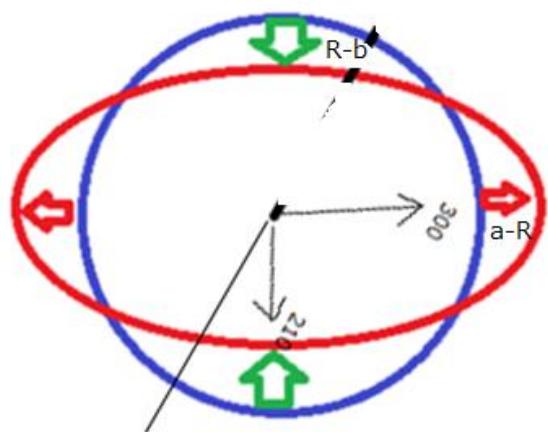


Fig. 2 Comparison between present FE analysis and Brazier's theory⁽¹⁾ for elastic material

上のグラフから、塔にかかる力が変動すれば、それと同じ周期的な変動が、 $R-b$ にも、 $a-R$ にも起きることが分かります。

傾き加減を見れば、 $R-b$ の方が傾きが大きいので、同じ力の変動に対して、 $R-b$ の方が大きく変化するのです。これは、 a よりも b の方が大きく変化することを意味します。



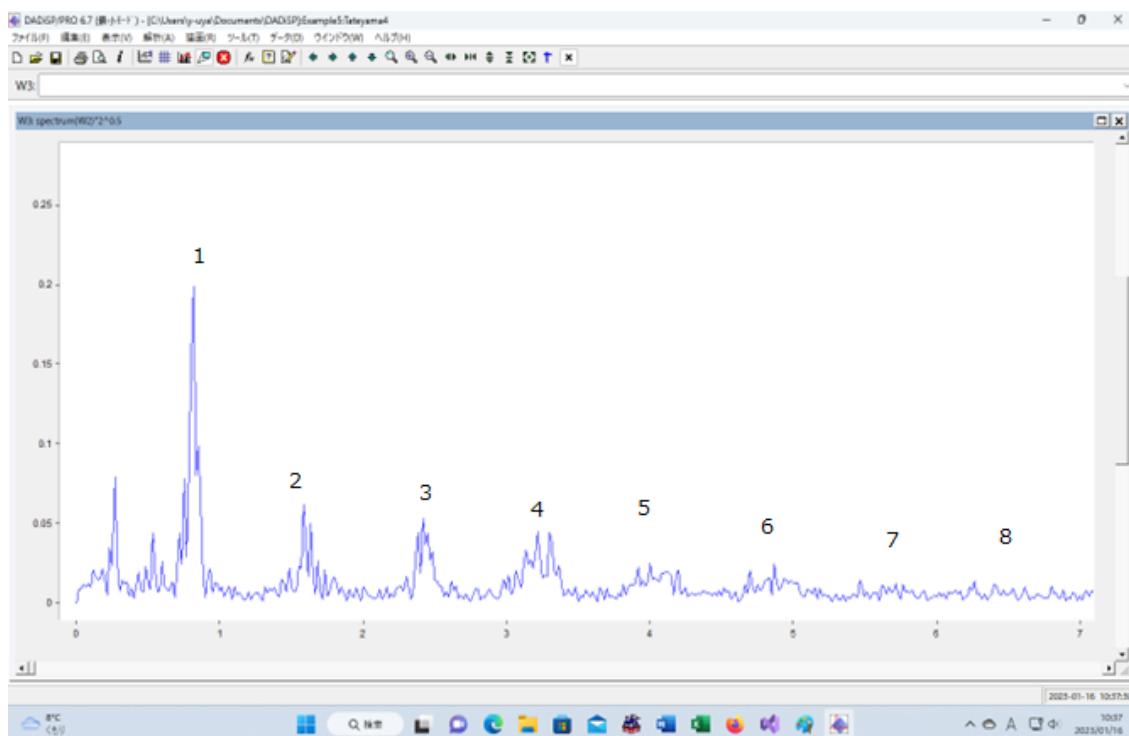
太鼓の面が大きく振動すれば大きな音が出ます。面積が広い方が大きな音になります。よって凹んでいる方の面から出る音の方が大きいのです。

この方向は、揚力ベクトルの方向とその反対側です。

これに直行する方向での、音がそれに次ぎます。

45度ずれた方向への振動はそれほどないので、風車からの低周波音は十字型の指向性を持っていることが分かります。

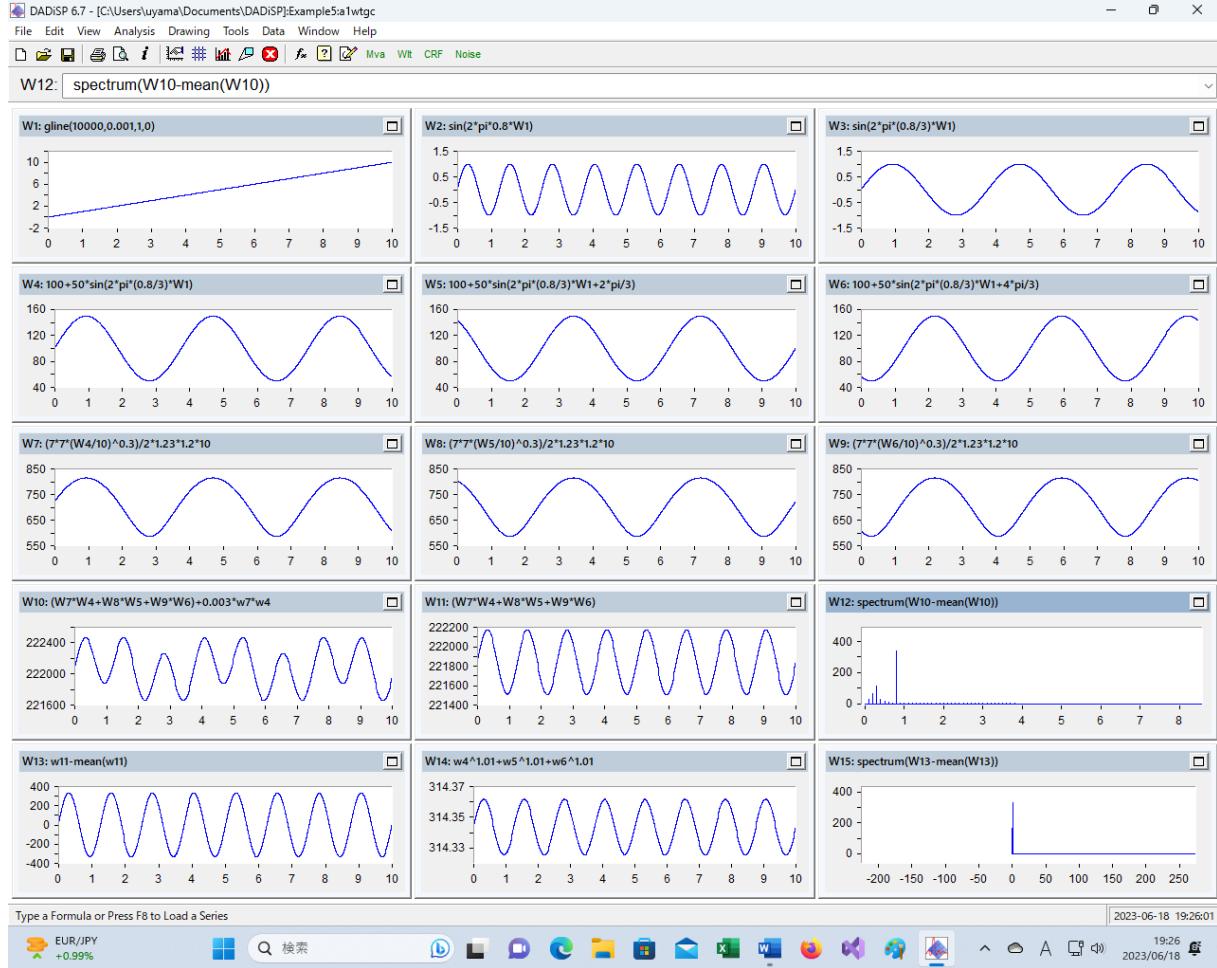
これが、 $0.8Hz = 3 \times 0.2667Hz$ 成分、 $1.6Hz = 2 \times 3 \times 0.2667Hz$ 、 $2.4Hz = 3 \times 3 \times 0.2667Hz$ 、 $..$ や、 $0.26667Hz$ 、 $0.53333Hz$ 、の成分が出現する理由です。



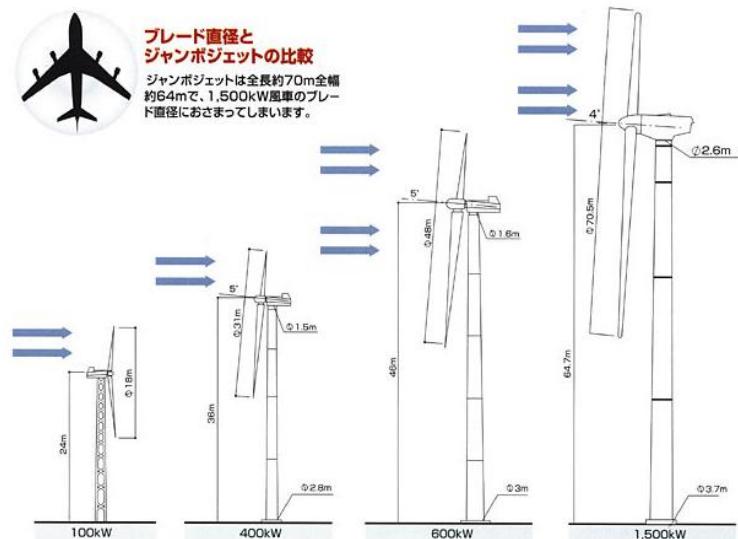
音圧がピーク値となるときの周波数に、次のような規則性がある。

周波数	倍率1	倍率2	音圧				
0.266667	1		0.05604				
0.533333	1.999996		0.03093802				
0.816667	3.062497	1	0.01405225	0.816667	1	0.816667	
1.583333	5.937491	1.938774	0.0435531	1.633334	2	1.633334	2
2.416667	9.06249	2.959183	0.02416667	2.450001	3		
3.216667	12.06249	3.938774	0.03173804			3.266668	4
4.000000	14.99998	4.897957	0.01772484	4.083335	5		
4.866667	18.24998	5.959182	0.01728335			4.900002	6
5.466667	20.49998	6.693875	0.01009538	5.716669	7		
6.266667	23.49997	7.673467	0.00978232			6.533336	8
9.783333	36.68745	11.97959	0.03974005				

計算は次の様になっています。



上空の強い風を求めて、風車は大型化しました。

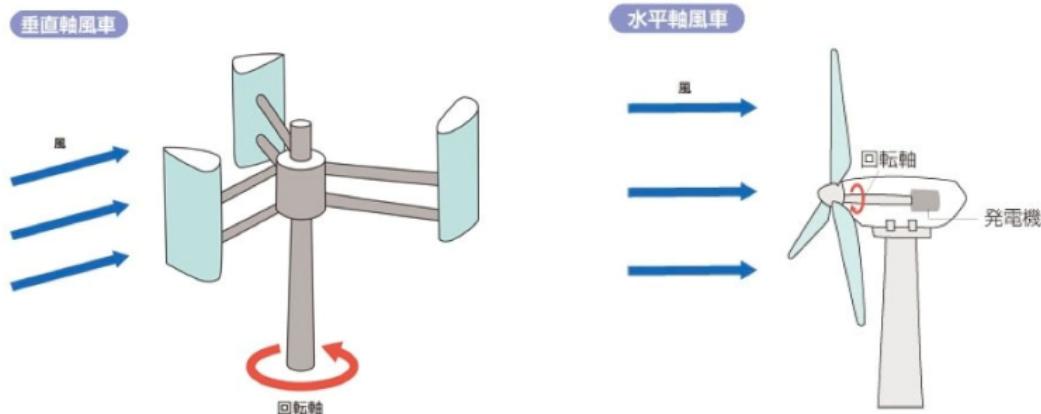


そして、上空の風速は大きいので、ブレードが真上に来る回数=ブレードが塔の前を通過する回数に対応して、ナセルや塔は揚力ベクトルの方向に大きく振動することになります。この振動による音は、大型風車では 0.5Hz程度の振動数をもち、極めて高い音圧を持っています。

振動の原因は、風車の構造そのものなのです。回軸が水平の風車では、ブレードは回軸の中心から見て、かなり上方の領域で強い風を受けるので、その回数に従った超低周波音(0Hz～20Hz)が発生します。強烈な超低周波音(0Hz～20Hz)の発生原因は、回軸が水平となっている風車の宿命なのです。

発電効率は良いかもしれないが、風力発電の設備としては、地元住民の目から見れば欠陥商品そのものなのです。

風力発電機の種類

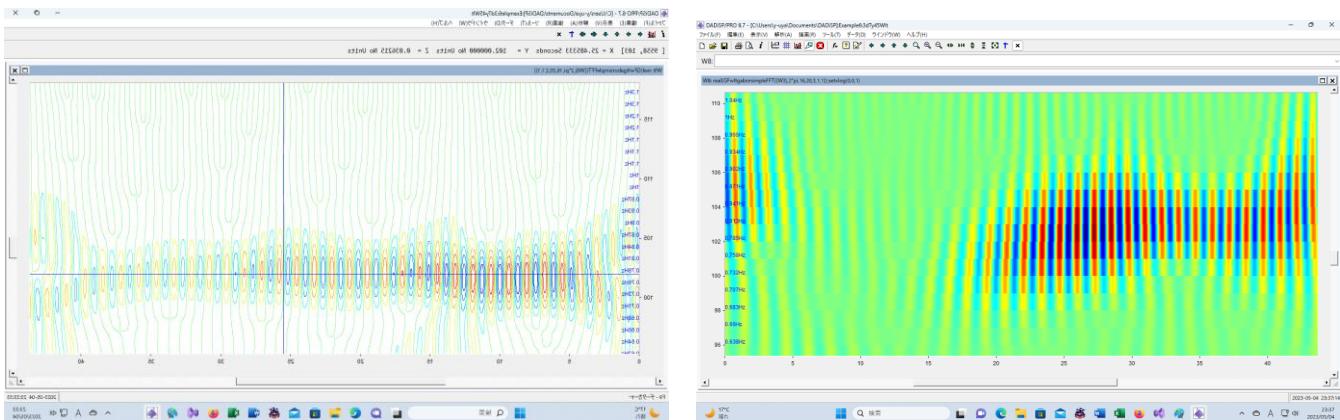


- ・ **垂直軸風車 :** 風向きに左右されず、発生する騒音は小さいが、軌道トルクが小さい。大規模化には向かない。
- ・ **水平軸風車 :** 最も普及している。高速で回転でき発電効率がよいが、方位制御機構が必要。騒音が発生する。
 - ▷ アップウインド型風車: タワーがブレードの風下側にある。
 - ▷ ダウンウインド型風車: タワーがブレードの風上側にある。

風力発電－風の力で発電 | エネルギー新時代 | J-Net21[中小企業ビジネス支援サイト] <http://j-net21.smrj.go.jp/develop/energy/introduction/2012011602.html>

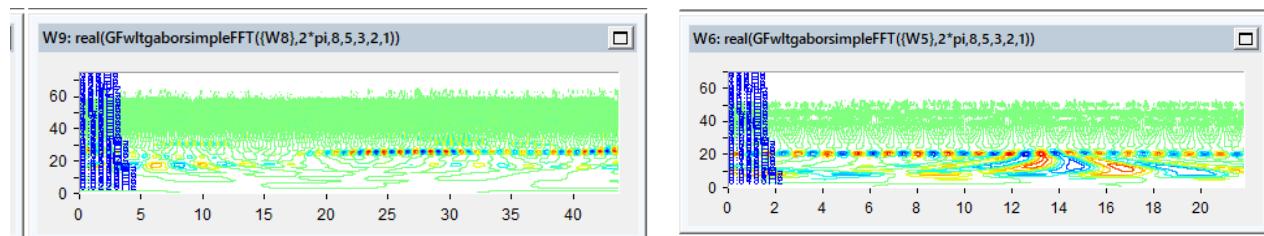
回軸が垂直の風車は、別の性質を持つと考えますが、データが無いので調べてはいません。

風車から出る、超低周波音の周波数が、ブレードが塔の前を通過する周期に対応することは、すでに確認しました。これは、ブレードが真上に来る周期と同じです。



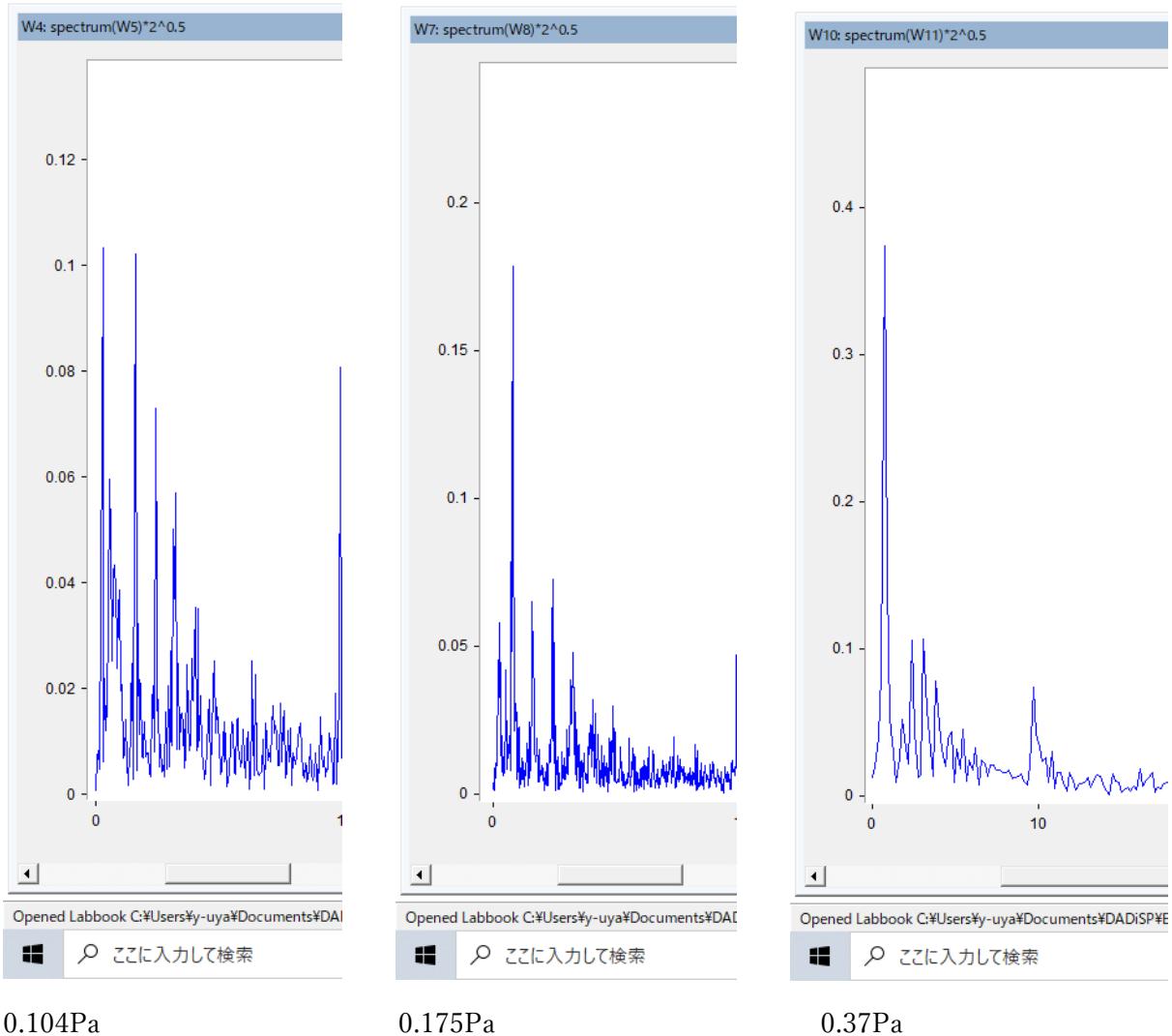
7回転		
21回通過	秒	周波数
21	28	0.75
21	22	0.95
21	23	0.91
21	23	0.91
21	24	0.88
21	27	0.78
21	30	0.70
21	24	0.88
21	26	0.81
21	25	0.84
21	26	0.81
21	26	0.81
21	26	0.81
21	27	0.78
21	31	0.68
21	31	0.68
21	27	0.78
21	26	0.81
21	25	0.84
21	26	0.81
21	28	0.75
21	28	0.75
平均		0.80

周波数の変動はそれほど大きくはありませんが、風車から出る超低周波音の音圧は大きく変化します。この2分間の結果を並べて表示すれば、下のようになります。



左のグラフの色の変化は、音の強さを表します。

色の薄い所、全体、色の濃い所を選んで、周波数スペクトルを計算すると、



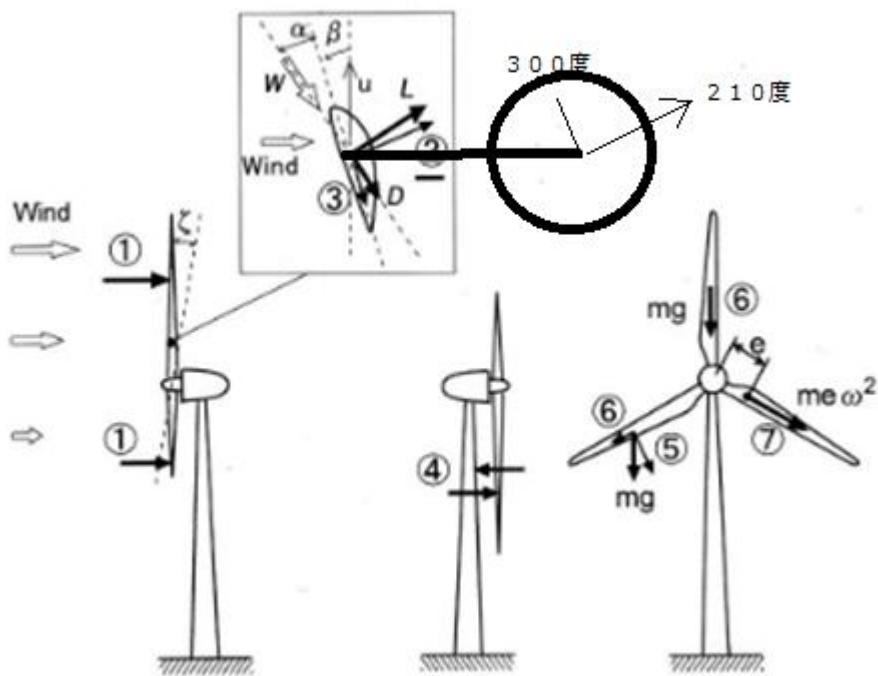
周波数の変動幅は少ないのですが、音圧は平均すると 0.175Pa、弱いときは 0.104Pa、強いときは 0.37Paです。強いときは、平均の2倍程度の音圧になり、激しく変動します。

次の表は、気象庁が計測したデータを、気象業務支援センターから入手したものです。

年	月	日	時	分	秒	前10秒間最大瞬間風速	前10秒間最小瞬間風速	前10秒間風程
						0.1m/s	0.1m/s	
2019	2	2	0	12	40	147	124	132
2019	2	2	0	12	50	146	107	131
2019	2	2	0	13	0	122	82	102
2019	2	2	0	13	10	105	65	83
2019	2	2	0	13	20	112	71	82

(前 10 秒間風程は、10 秒間に風が進む行程を意味します。132 は秒速 13.2m の風速です。)

風速も風向も不安定なのです。



上の図に於いて、回転速度ベクトル U は、慣性を考えると、急激には変化しないと思いますが、風速は急激に変化します。このとき、ベクトル W は方向と大きさを変えます。結果として揚力 L の大きさ変化します。

ナセルの部分の揺れ幅や方向も変化します。塔の変形の度合いも変化します。塔が曲がれば断面積は橿円となり、断面積は小さくなります。これは、塔内の容積が減少することになるので、塔内の気柱は圧縮されます。塔が大きく変形すれば、大きな圧縮となり、塔の変形が小さければ、圧縮の程度もち小さくなります。容積だけではなく、塔自体の変形の程度も重要です。

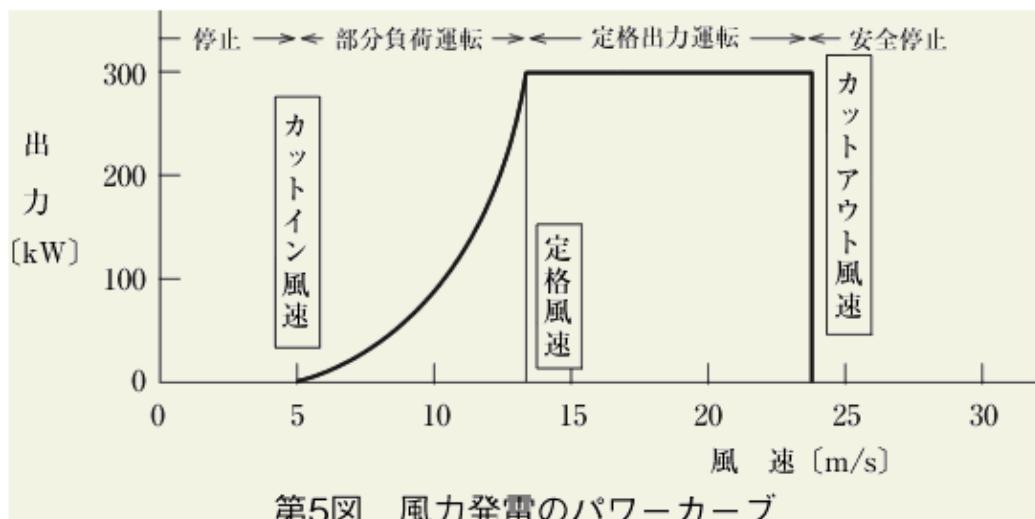
風速が変化すれば、それに従って、揚力、塔の容積、塔自身の変形の程度が変化します。これに対応して、風車から放出される、超低周波音の音圧が変化していると考えます。

8.2.7 回転制御と揚力ベクトル

カットイン風速:3~5m/s

定格風速:8~16m/s(定格出力に依存)

カットアウト風速:24~25m/s



回転開始(こうすれば、回転方向の揚力が発生するが、この方法は古い方法だそうです。)

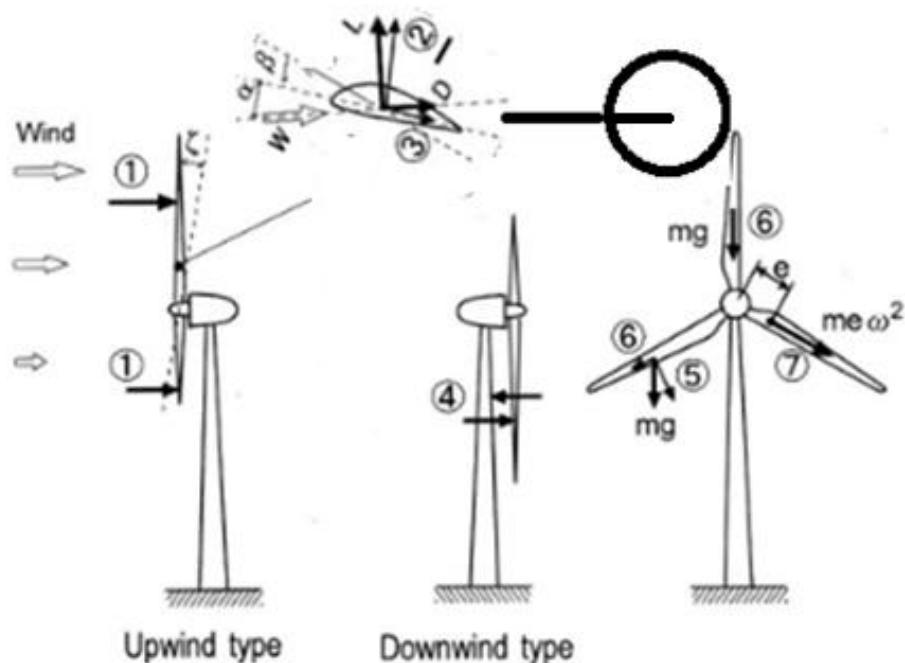
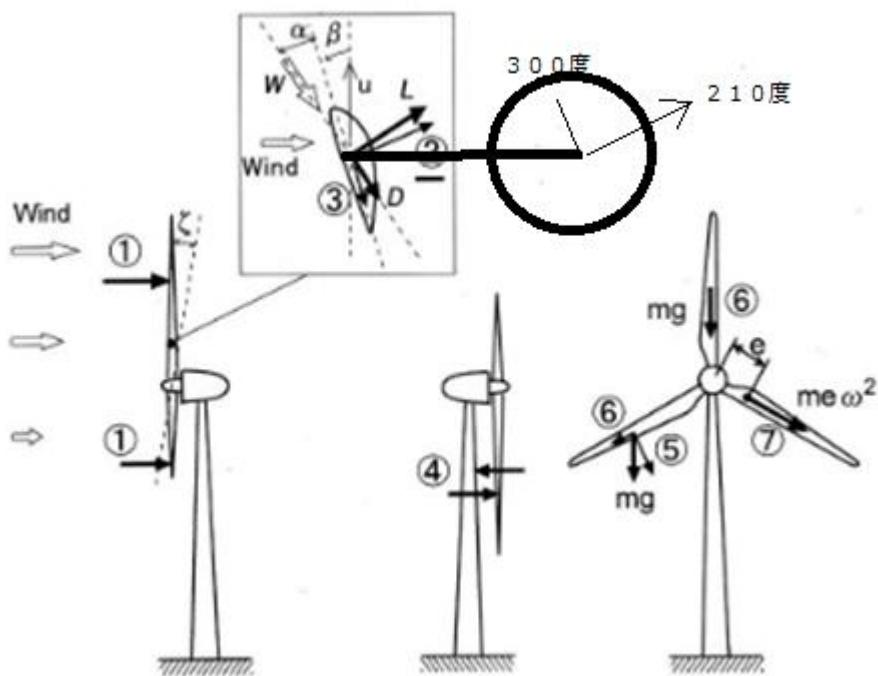


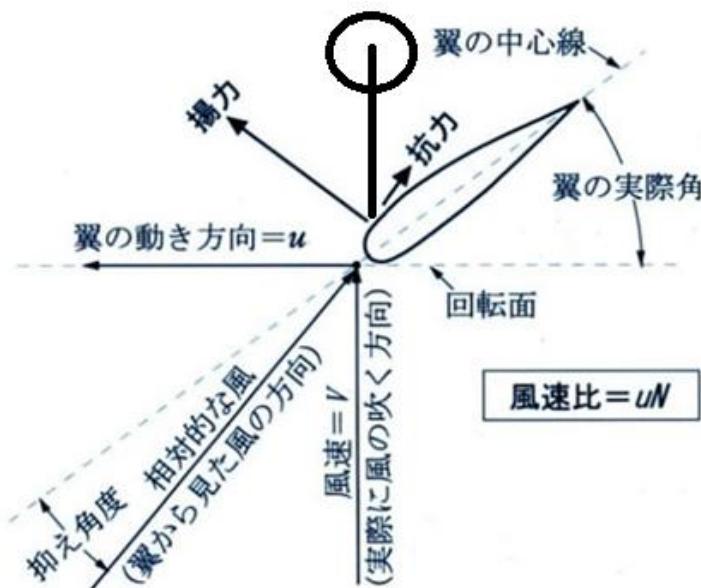
図2 風車に働く各種の力

定常出力運転



となるので、風車は、風下の方向のうち、揚力ベクトルに近い方向に押されて、ナセルの部分は、ブレードが真上に来る周期と同じ周期で、210度方向に大きく振動することになる。と考えます。

ネオマグ株式会社のHP あった図に、ナセルの位置を加えてみました。ナセルはブレードから見て風下にある。回転軸はブレードの回転面に対して垂直である。と考えて丸い印をナセルの場所と考えました。



回転する翼と相対的な風

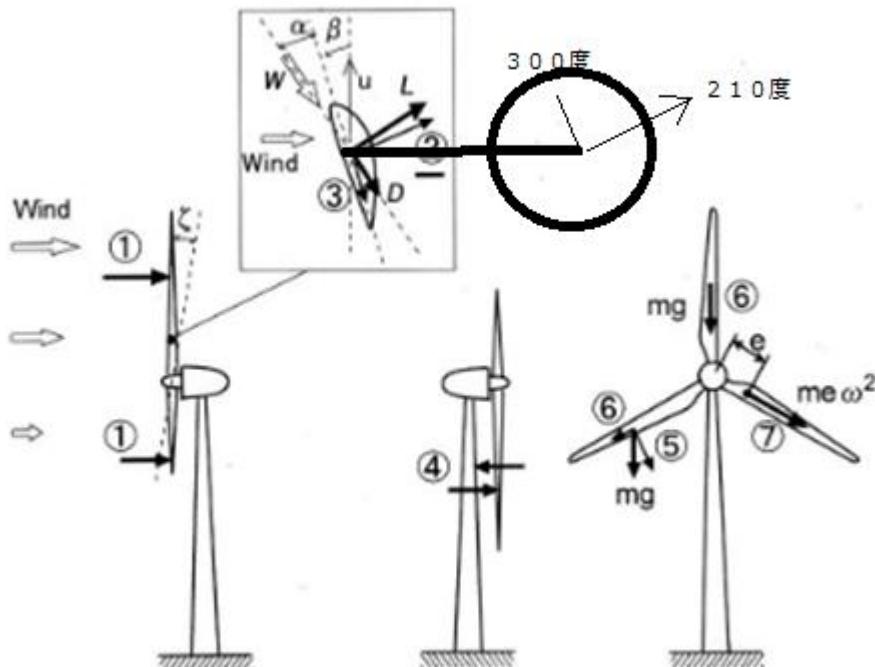
揚力を、回転面に平行な成分と、垂直な成分に分解すると、ナセルを風下方法に押す力が働くと考えます。また、回転軸が短いことを考えると、ナセルは、210度の方向(揚力の方向に近い)に大きく動くと考えられます。

翼に働く揚力 L は、Kutta-Joukowski の定理によって

$$L = \rho U \Gamma = 4\pi \rho U^2 \lambda \sin(\alpha - \delta)$$

で与えられる。揚力は、一様流の速度 U の 2 乗に比例することがわかります。

いま、ブレードは、風に対して下の図のような向きに固定されているとします。

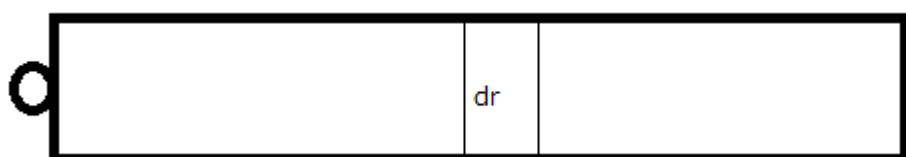


ブレードの形が下の図のように先端がとがっているのでしょうか、



図5 スリム翼の採用

計算が大変なので、断面が右の図のような、長さ 50m の矩形とします。



揚力は、切り口の形が同じなので、相対的な風の速度 U で決まると考えます。単位長当たりの揚力が

$$L = \rho U \Gamma = 4\pi \rho U^2 \lambda \sin(\alpha - \delta)$$

だとすれば、幅 dr の部分に働く揚力は $L dr$ となります。

田園地域で、地上 10m の時の風速が 7m/s のときは、

地上 $100 + r * \sin(\omega t + \theta)$ での風速は

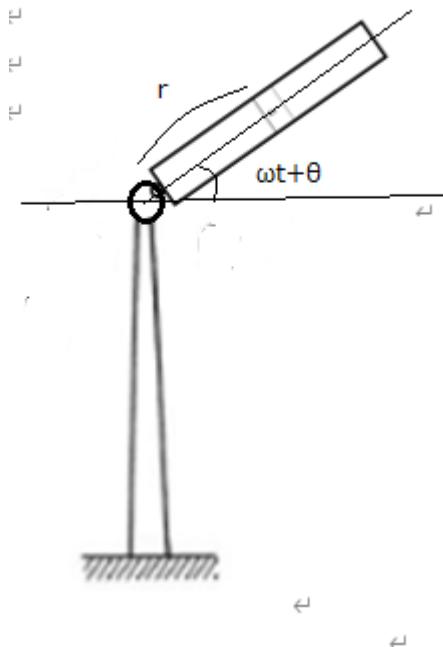
$$U = 7 * ((100 + r * \sin(\omega t + \theta)) / 10)^{0.15}$$

となります。この時

$$Ldr = \rho U \Gamma dr = 4\pi \rho (7 * \left(\frac{100 + r * \sin(\omega t + \theta)}{10} \right)^{0.15})^2 \lambda \sin(\alpha - \delta)$$

となって、

この力による、塔に対する回転モーメントは



$$Ldr * (100 + r * \sin(\omega t + \theta)) = k * ((100 + r * \sin(\omega t + \theta))^{1.3}) dr$$

となります。

$r = 0 \sim r = 50$ まで積分すれば、

$$M_\theta = \int_0^{50} k * ((100 + r * \sin(\omega t + \theta))^{1.3}) dr$$

となります。

$$M_0 + M_{\frac{2\pi}{3}} + M_{\frac{4\pi}{3}}$$

$$= k \int_0^{50} \left((100 + r * \sin(\omega t))^{1.3} + \left(100 + r * \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \right)^{1.3} + \left(100 + r * \sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right) \right)^{1.3} \right) dr$$

の計算は、

$$\begin{aligned} f(t) &= \{100 + 50 \sin(\omega t)\}^{1.3} \\ &\quad + \{100 + 50 \sin(\omega t + 2\pi/3)\}^{1.3} \\ &\quad + \{100 + 50 \sin(\omega t + 4\pi/3)\}^{1.3} \end{aligned}$$

の計算で 50 を r に変えたものであり、

展開式

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

と、

$f_n(x) = (\sin x)^n$ は、定数と $\sin(kx)$ 、 $\cos(kx)$ ($k = 1 \sim n$) の一次式で表現できるので、

$$f_n(x) = c_n + \sum_k a_k \sin(kx) + \sum_k b_k \cos(kx)$$

としたとき、

$$f_n(x) + f_n(x + 2\pi/3) + f_n(x + 4\pi/3)$$

は、定数と $\sin(3mx), \cos(3mx)$ のような形の項だけが残る。

$$M_0 + M_{\frac{2\pi}{3}} + M_{\frac{4\pi}{3}} = k \int_0^{50} \{(const, \sin(3m\omega t), \cos(3n\omega t)) \text{ の式で係数が } r \text{ の式}\} dr$$

となるので、振動数に関しては前と同様の結論になる。

8.2.8 笛と太鼓のお祭り騒ぎ

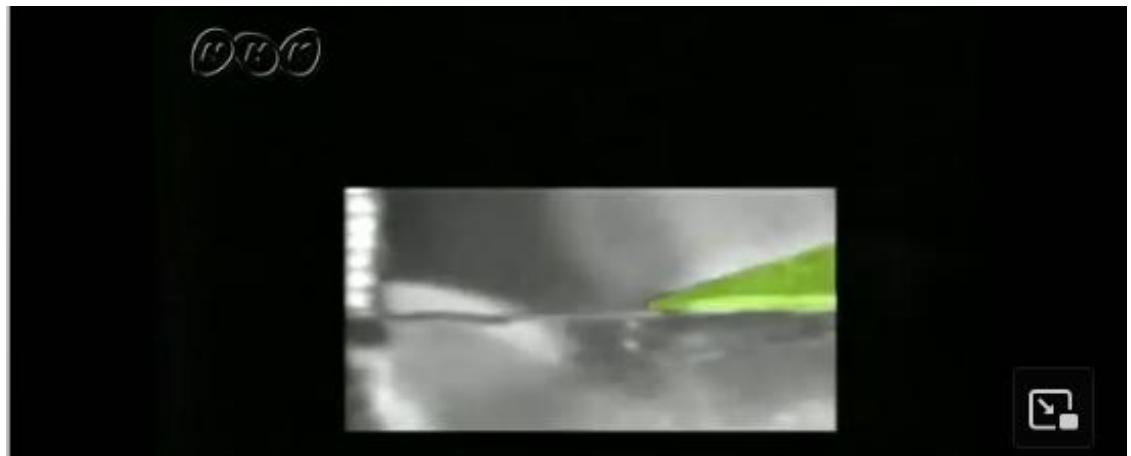
次の URL には、音の出る原因を解説した中学生向けの動画があります。

https://www2.nhk.or.jp/school/watch/clip/?das_id=D0005401118_00000&p=box

楽器は振動している－中学

太鼓の皮、ギターの弦、ハーモニカのリード。どれも音が出るときは振動しています。リコーダーは、空気の流れが振動しているのがわかります。





音が出るしくみは？

フルートの音はこうして出す

https://www.yamaha.com/ja/musical_instrument_guide/flute/mechanism/mechanism002.html



リコーダーに関しては、歌口の所に薄い板を置くと、それが外側に押されたり、内側に引き込まれたりする様子が分かります。一定の振動数で、歌口の空気が振動しています。

風車の塔の中の気柱も次の理由で、ナセルの隙間から出たり入ったりします。

ブレードが真上に来て、ブレードに掛る揚力によって、ナセルは、210度の方向に押されます。塔の中央部もその方向に動きます。動くときの周期は、ブレードが真上に来る回数によって決まります。

この時、塔の部分が曲がります。円柱状の塔が曲がれば、断面の形は円から橿円に変化します。周の長さが一定の図形で、面積が最大のものは円です。したがって、塔が曲がれば、容積が減少します。容積が減少すれば空気が外へ飛び

出します。塔が元の形になれば、容積がもとに戻るので、吐き出した空気を吸い込みます。

笛の歌口での空気の振動と同じ現象が起きます。笛から音が出るのと同じで、ナセルの隙間から音が出ます。

円筒の場合は、強制的な変形が起きれば、断面は円形でなくなります。円柱の長さが一定で、断面の形が変化するときには、円筒内の容積が変化します。変分法の教科書では、周が一定のもので面積が最大になるのは円であると書いてあります。

断面が円から橢円に変化すれば、断面積が減少し、容積も減少します。そして円筒内の空気は圧縮されることがあります。この結果、気柱も塔の変形に対応する、周波数の粗密波の発生源になります。

橢円の周の長さ

まず、橢円を $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$ と媒介変数表示する。

弧長積分の公式より

$$\begin{aligned} L &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-a \sin \theta)^2 + (b \cos \theta)^2} d\theta \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 \theta + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \theta} d\theta \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

一般化二項定理を用いて被積分関数を展開する：

$$\sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 \theta} = \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \frac{1}{2} C_t \epsilon^{2t} \cos^{2t} \theta$$

ただし、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} C_t &= \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdots (\frac{1}{2}-t+1)}{t!} \\ &= \frac{(-1)(-3) \cdots (-2t+3)}{2^t t!} \\ &= (-1)^{t-1} \frac{(2t-3)!!}{(2t)!!} \\ &= \frac{(-1)^{t-1}}{2t-1} c_t \end{aligned}$$

$$\text{以上より, } L = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)}{2t-1} c_t \epsilon^{2t} \cos^{2t} \theta d\theta$$

ここで、積分とシグマを交換する（厳密には一様収束→項別積分可能を使う）：

$$L = -4a \sum_{t=0}^{\infty} \frac{c_t \epsilon^{2t}}{2t-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2t} \theta d\theta$$

\cos の n 乗の積分公式より

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2t} \theta d\theta = \frac{\pi}{2} c_t \text{ となる。}$$

$$\text{よって, } L = 2\pi a \sum_{t=0}^{\infty} c_t^2 \frac{\epsilon^{2t}}{1 - 2t}$$

$$L = 2\pi a \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \frac{\epsilon^2}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{\epsilon^4}{3} - \dots \right\}$$

となるが、収束が遅いので、近似式としては不適当です。

そこで、もっと早く収束する近似式、

• 横円が円に近い場合 : Gauss-Kummerの公式

$$L = \pi(a+b) \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 h^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 h^4 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 h^6 + \dots \right\}$$

$$\text{ただし, } h = \frac{a-b}{a+b}$$

最初の項のみで近似すると $\pi(a+b)$

を使います。

ある程度変形して横円になっている切り口が、さらに押されてもう少し扁平になったとします。

最初の横円で、 $a>b$ であり、周の長さが $L=a+b$ だったとします。この時は面積 $S=\pi ab$ です。

周の長さが変化しないと仮定すれば、 a が $a+h$ となった時には、 $b=b-h$ になります。

この時の面積は、 $S' = \pi(a+h)(b-h) = \pi(ab+h(b-a)-h^2) < \pi ab = S$ となり、扁平度が増せば、面積は減少します。

のことから、塔がより傾けば容積が減少し、まっすぐに近くなれば容積が増えると言えます。

風車の場合では、ブレードが真上に来る回数に対応して、塔が押されてナセルの部分が大きく振動します。

さらに、塔が曲がるので、塔の切り口も円から横円に変化します。

この側面の変動は、地上 40mあたりで観測されています。変形の方向は、表面の振動方向で表現されています。表面の振動する部分は、4個の横円型うちわ太鼓の様に働いて、風車音に強い指向性を持たせることになります。

横円の扁平度が変化すれば、塔の中の容積が変化するので、塔の中の気圧も変化します。気柱も粗密波を生み出すことになります。

この時の振動数は、気柱の持つ固有振動数とは異なります。

風速の変化で、回転数が変化します。もちろん観測される風車音の周波数もそれに応じて変化します。

塔の側面では、いかがでしょうか、元の円の半径を r とすれば、楕円の短径と長径の間には、短径 $a < r <$ 長径 b 、ですから、曲がった時に、楕円の長軸方向に関しては、塔の側面が空気を押します。短軸方向では、逆に塔の側面が内側に向かって動くので、空気を塔の方に引き寄せることになります。

この動きは、太鼓の皮が振動して音が伝わる場合と同じです。ただし、位相の違う2個の太鼓の膜になるので、全体としての空気の振動は、複雑になります。音の指向性も複雑になります。

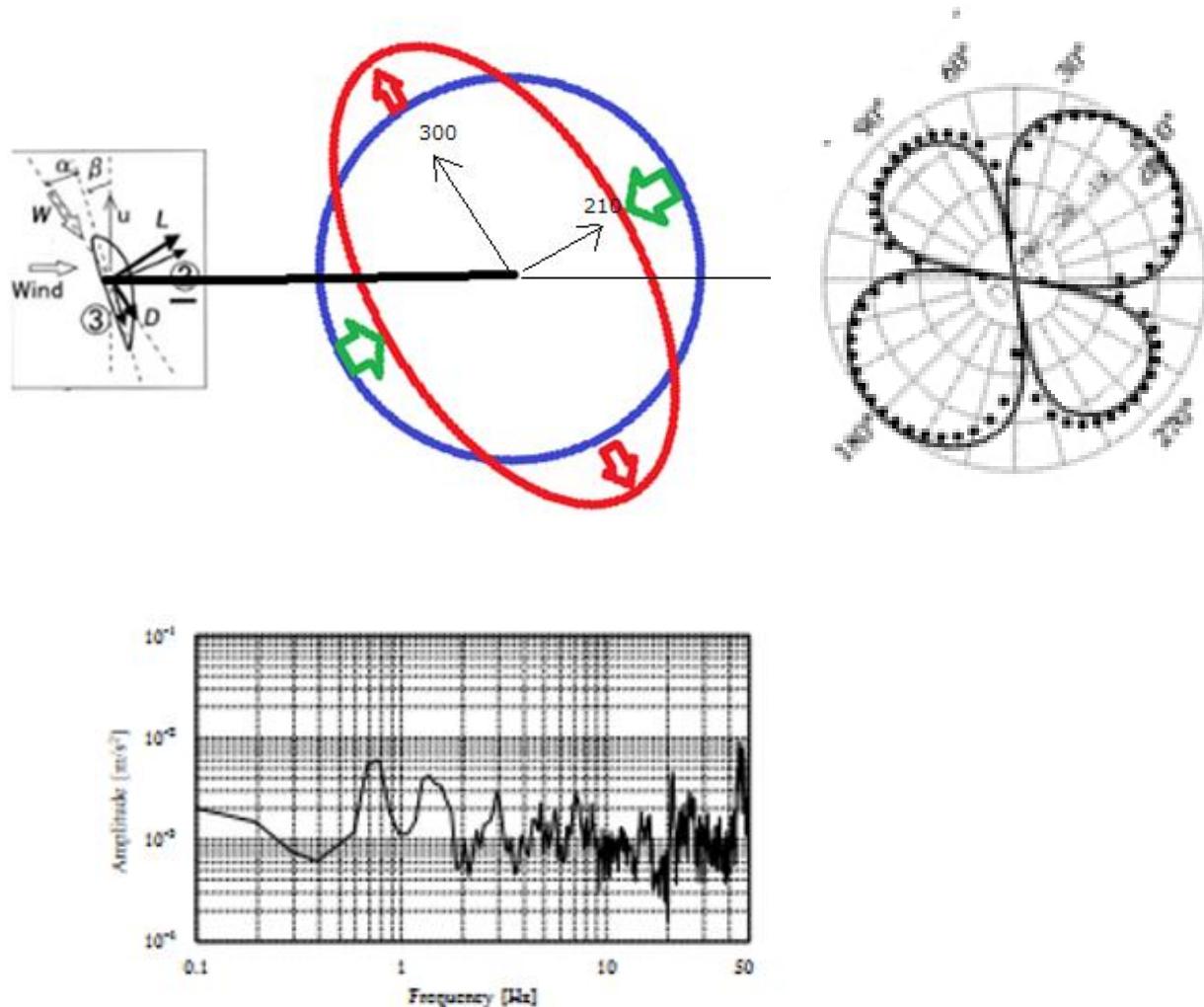


図 6 タワー内 40m 加速度 210 度方向スペクトル

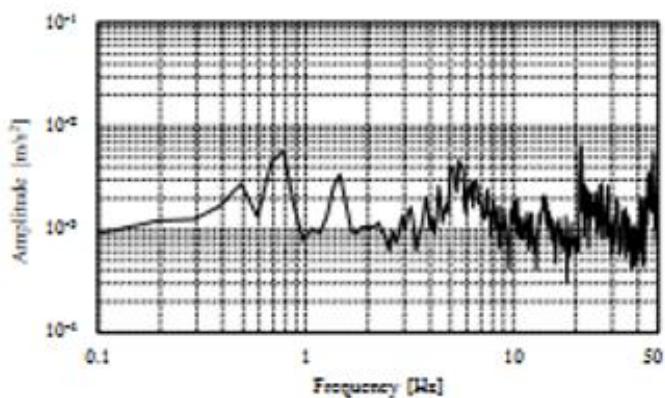


図 7 タワー内 40m 加速度 300 度方向スペクトル

塔の40mあたりは、210 度の方向と 300 度の方向に 1.6Hzで揺れています。これは、塔が曲がった時に、塔の表面がへこむ方向と張り出す方向です。

タワー内 40mの210度方向と 300 度方向は、太鼓の皮として動いている、塔の表面の方向なのです。

両側に橈円形に皮が張ってある、太鼓を2個組み合わせて音をだしているのです。

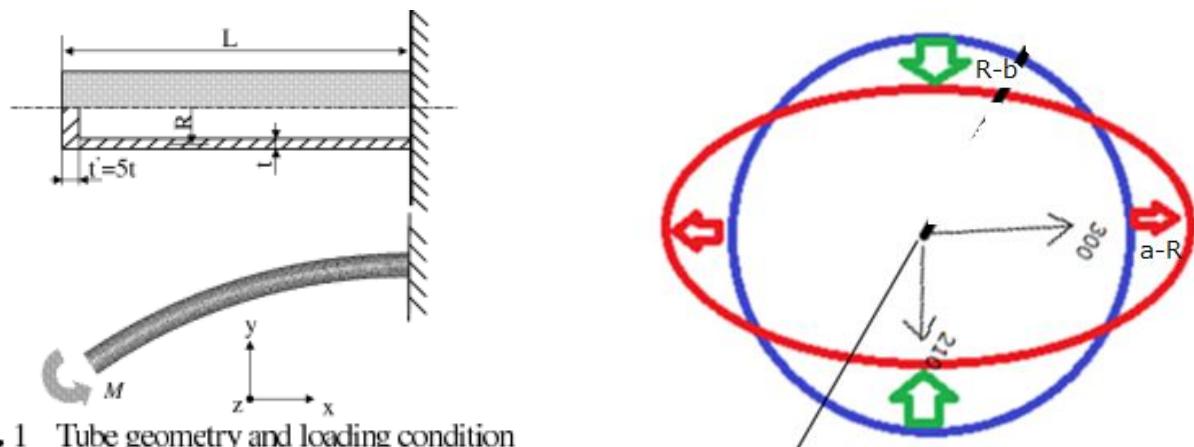


Fig. 1 Tube geometry and loading condition

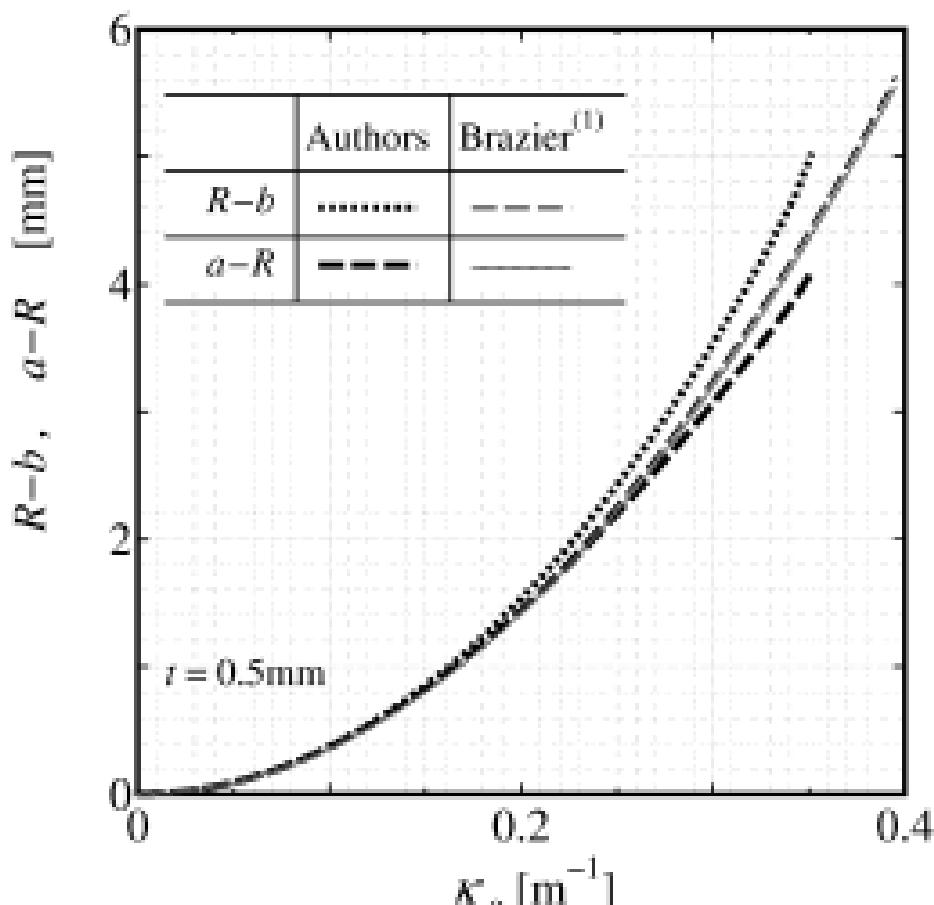
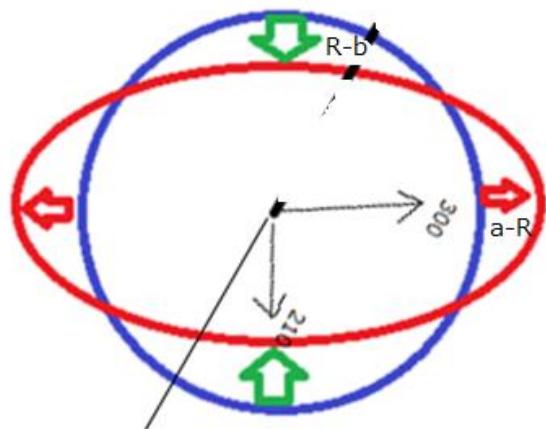


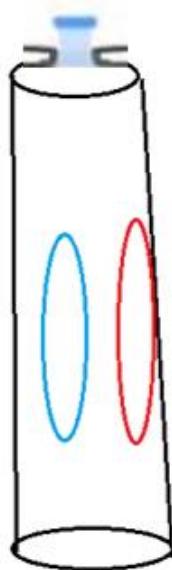
Fig. 2 Comparison between present FE analysis and Brazier's theory⁽¹⁾ for elastic material

上のグラフから、塔にかかる力が変動すれば、それと同じ周期的な変動が、 $R-b$ にも、 $a-R$ にも起きることが分かります。

傾き加減を見れば、 $R-b$ の方が傾きが大きいので、同じ力の変動に対して、 $R-b$ の方が大きく変化するのです。これは、 a よりも b の方が大きく変化することを意味します。



太鼓の面が大きく振動すれば大きな音が出ます。面積が広い方が大きな音になります。よって凹んでいる方の面から出る音の方が大きいのです。



巨大な笛と、巨大な太鼓が2個あって、それがブレードの揚力によって、音を出しているのです。

風車音の特徴を一言でいえば、“笛と太鼓のお祭り騒ぎ”となるのです。

8.2.10 エッフェル塔の風車

こんな議論をしていると、地球温暖化の問題を知らないのか、原子力発電での放射性廃棄物の処理が全くできていない現実を知らないのか、と言われそうです。

風車そのものが完全にダメなのがいえ、そうとも言い切れません。回軸が水平のものは、確かに超低周波音の発生器そのものですが、それとは別の風車もあります。

わずかに残る可能性は、垂直軸を持っている風車です。騒音を計測したこと、実物を見たこともないので断言はできませんが、研究してみる価値はあると思っています。

パリのエッフェル塔にはこの形の風車が付いています。とても静かだとのことです。もし、その風車から大きな騒音や強力な超低周波音が出たり、風車の揺れで塔が共振を起こしたら大変です。設置された風車は垂直軸方式のもので、風力発電特有のタービン音がほとんどないという優れものです。

パリのエッフェル塔に風力発電設置 地上 120m の風を利用。太陽光設備も併設。年末の COP21 に向けて「再エネのシンボル」に (FGW)

2015-02-26 15:10:23



フランスの名所、

エッフェル塔が再生可能エネルギー発電のシンボルとして脚光を浴びている。塔の改修工事に伴って、地上 120 メートルのところに風力発電所が、また太陽光発電パネルも設置されたためだ。

設置された風力発電は垂直軸方式のもので、風力発電特有のタービン音がほとんどないという。発電事業を担当する Urban Green Energy International (UGE) によると、発電量は年間 10,000kWh で、エッフェル塔の観光客向け電力をほとんど賄うことができるという。

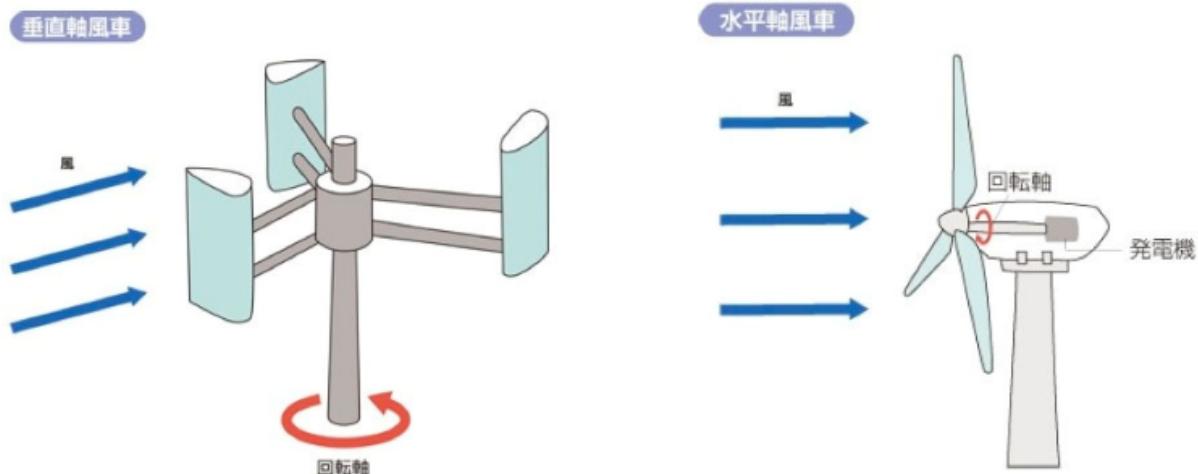
また風力発電の設備のデザインも、歴史あるエッフェル塔にマッチしたデザインとし、色も塔の色に溶け込むように工夫されている。事業者の UGE は、「塔全体のエネルギー効率化も進める。エッフェル塔はパリの気候変動計画のシンボルとなる」と自賛している。

太陽光パネルは塔に併設して二つあるパビリオンの屋根に 10m² の規模で置かれる。規模は小さいがパビリオンで使用する水を温める電力の 50%を賄うことができるという。

このほか、エッフェル塔には、照明に LED を導入したほか、塔全体の温度を安定させるため、高効率のヒートポンプや、雨水を利用した中水道システムなども取り入れられている。UGE の CEO のニック・ビッタースウィークさんは「エッフェル塔が持続可能な未来の象徴となるように最先端技術を導入したことを誇りに思う」と胸を張っている。

塔の高さでは、日本のスカイツリーや東京タワー等に及ばないものの、常に未来を志向するエッフェル塔の魅力に、パリっ子も鼻高々、というところだ。

風力発電機の種類



- **垂直軸風車**：風向きに左右されず、発生する騒音は小さいが、軌道トルクが小さい。大規模化には向かない。
- **水平軸風車**：最も普及している。高速で回転でき発電効率がよいが、方位制御機構が必要。騒音が発生する。
 - ▷ アップウインド型風車：タワーがブレードの風下側にある。
 - ▷ ダウンウインド型風車：タワーがブレードの風上側にある。



8.2.9 揚力以外の塔にかかる力

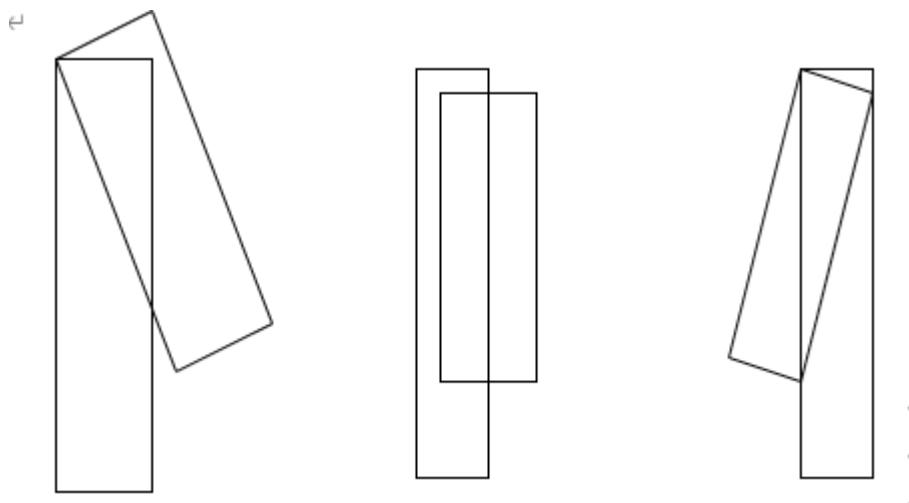
風車は風を受けて回転し、風の運動エネルギーの 30%を電気エネルギーに変換します。

風車の塔は巨大な円柱です。風が平面に当たるときと円柱に当たるときでは同じ投影面積でも異なる荷重がかかります。

この変動は、回転翼が塔の部分と重なると塔にかかる風の力が減少します。

円周が、 $2*3.14*40=251\text{m}$ なので 3秒に1回回転するとして、先端は 1秒間に、 $251/3=83.7\text{m}$ 進む。塔の幅を 4mとして、塔と回転翼が重なりあっている時間は8メートルを進むのに要する時間として、 $8/83.7=0.1$ 秒。この 0.1 秒間だけ塔にかかる荷重が変化する。これが、1秒間隔でおこる。

重なり具合と時間の計算の根拠



塔にあたる圧力の変化について考えます。

エネルギー効率の観点から考えると、風力発電にかんしてタービンの効率も風の持つ純粋な運動エネルギーの59.3%までが理論上取り出せ、高回転型ペラでは40%前後まで来ている

よって、ここでは発電効率を風のエネルギーの 30%として考える。

風は風車にエネルギーを30%とられるすると 70%のエネルギーが残る。

風速 13mの風があったとして、風の持つエネルギーは

$$E1=0.5*m*13*13$$

これが、その 30%のエネルギーを失ったとすると、

$$E2=0.5*m*v*v=0.7*E1$$

$$v*v=0.7*13*13 \text{、 であり、 } 0.84*0.84=0.7, \quad 13*0.84=10.92$$

となるので、風車の羽と、塔が重なったときは塔にあたる風は弱まり風速は

$$V=10.92 \text{ となる。}$$

風速 10.92mの場合には

$$P=\frac{10.92^2}{2} \times 1.23 \times 0.7 = 51.34 \quad [\text{N}/\text{m}^2]$$

$$\int_{40}^{80} x \cdot 4 \cdot 51.34 dx = 657152 - 164288 = 492864 \leftarrow$$

回転モーメントの減少は

$$\int_{40}^{80} x \cdot 4 \cdot 72.75 dx = 931200 - 232800 = 698400 \leftarrow$$

との差、 $698400 - 492864 = 205536 \text{ Nm}$ だけ減少する。これを 9.8 で割ると、

20973 kg m になる。80m先の加重としての変化は、

$$20973/80 = 262 \text{ KgW}$$

となる。

4.4.4 塔の変形について

塔の変形に関しては、塔内の容積の変化と側面の形状の変化を検討する必要があります。これらは、塔の曲がり方で決まります。

梁を、位置 A で仮想切断し、内部の仮想断面にせん断力 F, 曲げモーメント M を置き力の釣合を考える。

たわみ角を考えるときは、x 軸は右向きにとり、y 軸は下向きにとって、 $\tan \theta = \frac{dy}{dx}$ としたときの θ がたわみ角となる。

定義：y 軸を下に向かたとき、点(x, y) におけるたわみ曲線の接線が、x 軸となす角度をたわみ角と呼ぶ。

たわみ角 i はその定義から y 軸を下に取るときに、

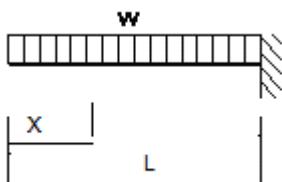
$$\tan i = (dy/dx),$$

として与えられる。はりのたわみが微小であるとき、たわみ角も微小であるから、

$$i \approx \tan i = dy/dx$$

となる。

例1) 次の片持ち梁のたわみ・たわみ角を求める。



このような等分布荷重が掛かっている梁のたわみを求める。

長さ L の梁に均等加重 W がかかっているので、単位の長さあたりの加重は W

梁の左端から x だけ右に行ったところの場所を A とする。点 A を座標の原点として A 点から左に p だけ進んだ部分に幅 dp の部分を考える。

点 A に関して、回転モーメントは、時計の針と反対方向のものを正、時計の針と同じ方向の回転を負とすれば、この微小部分による回転モーメントは $w * dp * p$ 、A 点における切断面を考えたときにこれに対する反作用としての曲げモーメントは、 $-w * dp * p$ である。

A 点より左の部分による回転モーメントの全体は

$$\int_0^x W * p * dp = [Wp^2 / 2]_0^x = WX^2 / 2$$

よって、A 点よりも左側の部分による回転モーメントが $WX^2 / 2$ なので、これに釣り合うように、A 点での仮想切断面に加えなくてはならない曲げモーメントは、時計回りと同じ方向なので符号は負になります。

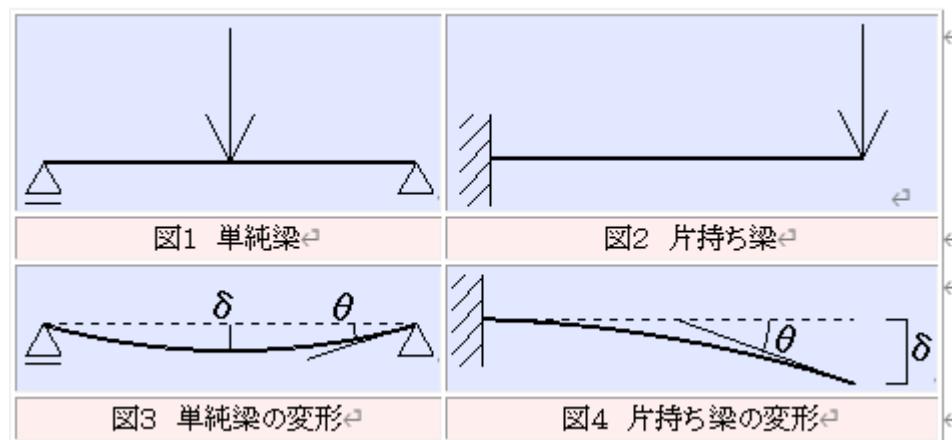
$$M = -WX^2 / 2$$

となる。

■ たわみ角 θ

たわみ、たわみ角

図1・図2のような梁に荷重を掛けると、載荷後はそれぞれ図3・図4のようになります。このときの変位量をたわみ(δ)といい、変形後の部材に対する接線の角度をたわみ角(θ)と言います。



$$\theta = -\int \frac{M}{EI} dx \quad \text{であり、 } M = -WX^2 / 2 \quad \text{なので、}$$

$$\text{原始関数は、 } \theta = (W/2EI) * ((X^3 / 3) + C)$$

たわみ角は、支点がフィックスですので $X=L$ のとき $\theta=0$ となり

$$C = -\frac{L^3}{3}$$

$$\text{よって、} \theta = (W/2EI) * ((X^3/3) - (L^3/3))$$

たわみ角の絶対値がもっとも大きくなるのは、X=0のときで、

$$\theta = -\frac{WL^3}{6EI}$$

$$\theta = -\int_L^X \frac{M}{EI} dx = \int_L^X \frac{W}{2EI} x^2 dx = \left[\frac{W}{2EI} \frac{x^3}{3} \right]_L^X = \frac{WX^3}{6EI} - \frac{WL^3}{6EI}$$

y 軸が上向きならば、X=0での接線は傾きが正なのですが、y 軸を下に向けてれば、たわみ角を考えるので、θ は負になります。

$$\theta = -\int_L^0 \frac{M}{EI} dx = \int_0^L \frac{-W}{2EI} x^2 dx = \left[\frac{-W}{2EI} \frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{-WL^3}{6EI}$$

としても計算できる。

■ たわみ δ (y 軸を下に向けて、計算します。)

たわみ角の式を積分します。

$$\theta = (W/2EI) * ((X^3/3) - (L^3/3)) \leftarrow$$

で、積分は、

$$\begin{aligned} \delta &= \int_L^X (W/2EI) * \left(\frac{x^3}{3} - \frac{L^3}{3} \right) dx \\ &= (W/2EI) \left[\frac{x^4}{12} - \frac{L^3}{3} x \right]_L^X \leftarrow \\ &= (W/2EI) \left(\frac{X^4}{12} - \frac{L^3}{3} X \right) - \left(\frac{L^4}{12} - \frac{L^3}{3} L \right) \\ &= (W/6EI)(X^4/4 - L^3 X + 3L^4/4) \end{aligned}$$

です。または、初期条件を使うなら、

$$\begin{aligned} \delta &= \int (W/2EI) * ((X^3/3) - (L^3/3)) dx \Big|_L^X \\ \delta &= (W/6EI)\{X^4/4 - L^3 X + C\} \end{aligned}$$

たわみは、初期条件として、X=L のとき δ=0 ですので、Xに L を代入すると

$$C = 3L^4 / 4$$

よって、

$$\delta = (W / 6EI) \{ X^4 / 4 - L^3 X + 3L^4 / 4 \}$$

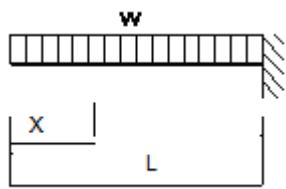
たわみが最大となるのは、(y軸を下向きにとって)

$X=0$ で、

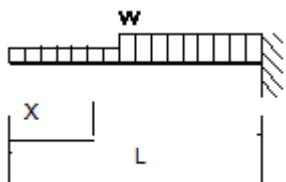
$$\delta = (W / 6EI) \{ 3L^4 / 4 \} = WL^4 / 8EI$$

荷重が変化した場合の塔のたわみとたわみ角

例2) 次の片持ち梁のたわみ・たわみ角を求める。



図(1)



図(2)

風車の先端についている回転翼の部分は変化しないので、塔にかかる風による均等加重の変化だけを考えます。図(1)については既に求めたので、図(2)の場合について考えます。

長さ L の梁の右半分に均等加重 W がかかっていて、左半分に均等加重 V がかかっているとします。

$X < L/2$ の場合

梁の左端から x だけ右に行ったところの場所を A とする。点 A を座標の原点として A 点から左に p だけ進んだ部分に幅 dp の部分を考える。

点 A に関して、回転モーメントは、時計の針と反対方向のものを正、時計の針と同じ方向の回転を負とすれば、この微小部分による A 点に対する回転モーメントは $V * dp * p$ 、これに釣り合う曲げモーメントは、 $-V * dp * p$ であり、回転モーメントの全体は

$$\int_0^x V * p * dp = [Vp^2 / 2]_0^x = VX^2 / 2 \leftarrow$$

よって、A点よりも左側の部分による回転モーメントは、 $VX^2 / 2$ なので、これに釣り合うように、A点での仮想切断面に加えなくてはならない曲げモーメントは、逆方向の回転モーメントであり、時計回りと同じ方向なので符号は正になります。

$$M = -VX^2 / 2$$

となる。

$X > L/2$ の場合

梁の左端からxだけ右に行ったところの場所を A とする。点 A を座標の原点として A 点から左に pだけ進んだ部分に幅 dp の部分を考える。

点 A に関して、回転モーメントは、時計の針と反対方向のものを正、時計の針と同じ方向の回転を負とすれば、この微小部分による点 A に対する回転モーメントは、

$$(X - L/2) > p \quad \text{の場合は、} W * dp * p$$

$(X - L/2) < p$ の場合は、 $V * dp * p$ であり、回転モーメントの全体は

$$\begin{aligned} & \int_0^{X-L/2} W * p * dp + \int_{X-L/2}^X V * p * dp \\ &= [Wp^2 / 2]_0^{X-L/2} + [Vp^2 / 2]_{X-L/2}^X \quad \leftarrow \\ &= W(X - L/2)^2 / 2 + VX^2 / 2 - V(X - L/2)^2 / 2 \end{aligned}$$

よって、A点よりも左側の部分による回転モーメントに釣り合うように、A点での仮想切断面に加えなくてはならない曲げモーメントは逆方向の回転モーメントであり、時計回りと同じ方向なので符号は負になります。

$$M = -W(X - L/2)^2 / 2 - VX^2 / 2 + V(X - L/2)^2 / 2 \downarrow$$

となる。

■ たわみ角 θ

たわみ、たわみ角

図1・図2のような梁に荷重を掛けると、載荷後はそれぞれ図3・図4のようになります。このときの変位量を [たわみ \(\$\delta\$ \)](#) と言い、変形後の部材に対する接線の角度を [たわみ角 \(\$\theta\$ \)](#) と言います。

$$\theta = - \int \frac{M}{EI} dx$$

であり、

$$\theta = - \int_L^x \frac{M}{EI} dx = \int_L^x \frac{W}{2EI} x^2 dx = \left[\frac{W}{2EI} \frac{x^3}{3} \right]_L^X = \frac{WX^3}{6EI} - \frac{WL^3}{6EI}$$

$x < L/2$ なら、 $M = -VX^2/2$

$x > L/2$ なら、 $M = -W(X-L/2)^2/2 - VX^2/2 + V(X-L/2)^2/2$

なので、

$$\begin{aligned} \theta(x) &= - \int_L^x \frac{M}{EI} dx \\ &= - \int_L^{L/2} \frac{M}{EI} dx - \int_{L/2}^x \frac{M}{EI} dx \\ &= - \int_L^{L/2} \frac{-W(x-L/2)^2/2 - VX^2/2 + V(X-L/2)^2/2}{EI} dx - \int_{L/2}^x \frac{-VX^2/2}{EI} dx \\ &= \left[\frac{-W(x-L/2)^3/3 - VX^3/3 + V(X-L/2)^3/3}{2EI} \right]_{L/2}^L + \left[\frac{-VX^3/3}{2EI} \right]_{L/2}^x \\ &= \left(\frac{-W(L/2)^3/3 - VL^3/3 + V(L/2)^3/3}{2EI} \right) - \left(\frac{-V(L/2)^3/3}{2EI} \right) \\ &\quad + \left(\frac{-V(L/2)^3/3}{2EI} \right) - \left(\frac{-VX^3/3}{2EI} \right) \\ &= \frac{1}{2EI} (-W(L/2)^3/3 - VL^3/3 + V(L/2)^3/3 + VX^3/3) \end{aligned}$$

$X > L/2$ なら、

$$\begin{aligned}
\theta(x) &= - \int_L^x \frac{M}{EI} dx \\
&= - \int_L^x \frac{M}{EI} dx \\
&= - \int_L^x \frac{-W(x-L/2)^2/2 - Vx^2/2 + V(x-L/2)^2/2}{EI} dx \\
&= \left[\frac{-W(x-L/2)^3/3 - Vx^3/3 + V(x-L/2)^3/3}{2EI} \right]_L^x \\
&= \left(\frac{-W(L/2)^3/3 - VL^3/3 + V(L/2)^3/3}{2EI} \right) \\
&\quad - \left(\frac{-W(X-L/2)^3/3 - VX^3/3 + V(X-L/2)^3/3}{2EI} \right)
\end{aligned}$$

$X=L/2$ ならば、

$$\theta(L/2) = \frac{1}{2EI} (-W(L/2)^3/3 - VL^3/3 + V(L/2)^3/3 + V(L/2)^3/3)$$

となる。

ここで、 $V=0.7W$ (風のエネルギーの 30%が発電に使われた。)と仮定すると、

$X>L/2$ の場合は

$$\begin{aligned}
\theta(x) &= \left(\frac{-W(L/2)^3/3 - VL^3/3 + V(L/2)^3/3}{2EI} \right) \\
&\quad - \left(\frac{-W(X-L/2)^3/3 - VX^3/3 + V(X-L/2)^3/3}{2EI} \right)_< \\
&= \frac{W}{6EI} \left(-(L/2)^3 - 0.7L^3 + 0.7(L/2)^3 \right) \\
&\quad - \frac{W}{6EI} \left(-(X-L/2)^3 - 0.7X^3 + 0.7(X-L/2)^3 \right)
\end{aligned}$$

$X<L/2$ なら、

$$\begin{aligned}
\theta(x) &= \frac{1}{2EI} (-W(L/2)^3/3 - VL^3/3 + V(L/2)^3/3 + VX^3/3) \\
&= \frac{W}{6EI} \left(-(L/2)^3 - 0.7L^3 + 0.7(L/2)^3 + 0.7X^3 \right)
\end{aligned}$$

■ たわみ δ (y 軸を下に向けて、計算します。)

たわみ角の式を積分します。

$X < L/2$ なら

$$\theta(x) = \frac{1}{2EI} \left(-W(L/2)^3/3 - VL^3/3 + V(L/2)^3/3 + VX^3/3 \right) \leftarrow$$

$X > L/2$ なら、

$$\begin{aligned} \theta(x) = & \left(\frac{-W(L/2)^3/3 - VL^3/3 + V(L/2)^3/3}{2EI} \right) \leftarrow \\ & - \left(\frac{-W(X-L/2)^3 - VX^3/3 + V(X-L/2)^3/3}{2EI} \right) \end{aligned}$$

$X=L/2$ ならば、

$$\theta(L/2) = \frac{1}{2EI} \left(-W(L/2)^3/3 - VL^3/3 + V(L/2)^3/3 + V(L/2)^3/3 \right) \leftarrow$$

となる。

ここで、 $V=0.7W$ (風のエネルギーの 30% が発電に使われた。)と仮定すると、

$X > L/2$ の場合は、

$$\theta(x) = \frac{W}{6EI} \left(\frac{-5.9L^3}{8} + 0.3(X-L/2)^3 + 0.7X^3 \right) \leftarrow$$

$X < L/2$ なら、

$$\theta(x) = \frac{W}{6EI} \left(\frac{-5.9L^3}{8} + 0.7X^3 \right)$$

で、積分は、

$$\begin{aligned}
\delta &= \int_L^0 \theta(x) dx = \frac{W}{6EI} \int_L^{L/2} \left(\frac{-5.9L^3}{8} + 0.3(x - L/2)^3 + 0.7x^3 \right) dx \\
&+ \frac{W}{6EI} \int_{L/2}^0 \left(\frac{-5.9L^3}{8} + 0.7x^3 \right) dx \\
&= \frac{W}{6EI} \left\{ \left[\frac{-5.9L^3}{8} x + 0.3(x - L/2)^4/4 + 0.7x^4/4 \right]_L^{L/2} + \left[\frac{-5.9L^3}{8} x + 0.7x^4/4 \right]_{L/2}^0 \right\} \\
&= \frac{W}{6EI} \left\{ \left(\frac{-5.9L^4}{16} + 0.7 \frac{L^4}{64} + \frac{5.9L^4}{8} - 0.3(L/2)^4/4 - 0.7L^4/4 \right) + \left(\frac{5.9L^4}{16} - 0.7 \frac{L^4}{64} \right) \right\} \\
&= \frac{W}{6EI} \left\{ \left(\frac{5.9L^4}{8} - 0.3 \frac{L^4}{64} - 0.7 \frac{L^4}{4} \right) \right\} \\
&= \frac{W}{6EI} \frac{5.9*8 - 0.3 - 0.7*16}{64} L^4 \\
&= \frac{W}{6EI} \frac{35.7}{64} L^4 \\
&= \frac{WL^4}{EI} * 0.093
\end{aligned}$$

W の均等荷重の場合は、

X=0で、

$$\delta = (W/6EI)\{3L^4/4\} = WL^4/8EI = \frac{WL^4}{EI} 0.125 \leftarrow$$

なので、たわみの量は、0.744 倍になっている。

$$\delta = (0.125*72.75*80^4)/(4.66*10^11) = 0.0008m = 0.8mm$$

となる。0.8mm*0.744=0.6mm

ただし、

$$P = \frac{13^2}{2} \times 1.23 \times 0.7 = 72.75 \quad [N/m^2] \leftarrow$$

とし、さらに、

ヤング率 E=200*10^9 N/m^2 とすると

$$EI = 2.33*200*10^9 = 4.66*10^{11}$$

円筒の断面2次モーメントIは、外直径をD、内直径をdとしたとき

$$I = (\pi/64) * (D^4 - d^4)$$

です。肉厚をtとすれば $d = D - 2*t$ になります [1]。D = 4 m、t = 0.1m のとき、 $I = 2.33 \text{ m}^4$ になります。Eはヤング率ですから、鋼管の場合、200 GPa程度なので、曲げ剛性は $E*I = 4.66 \times 10^{11} [\text{N}\cdot\text{m}^2]$ です。

風車の支柱にかかる荷重は、風圧によって支柱全体にかかる均等荷重と、プロペラが受ける風圧による先端部への集中荷重の和で計算すべきだと思います。

1.2.10 風車にかかる力と気柱音圧の変化

風車の塔は巨大な円柱です。風が平面に当たるときと円柱に当たるときでは同じ投影面積でも異なる荷重がかかります。

風力係数

投影面積に対しての割増（割引）の値。形状が複雑になればなるほど、風力係数は大きな値が設定され、同じ投影面積でも加わる荷重が増大する。「空気抵抗」とも言われる。

従って、風速 40m/sにおける標識板（風力係数:1.2）と丸鋼管（風力係数:0.7）の風荷重を比較すると

空気密度を 1.23 kg/m^3 とすると

$$P = (V^2/2) \times 1.23 \times Cd \text{ より}$$

P:風荷重 $[\text{N}/\text{m}^2]$ 、V:風速 $[\text{m}/\text{s}]$ 、Cd:風力係数

$$\cdot \text{標識板 } P = 40^2/2 \times 1.23 \times 1.2 = 1181 \text{ [N/m}^2]$$

$$\cdot \text{丸鋼管 } P = 40^2/2 \times 1.23 \times 0.7 = 689 \text{ [N/m}^2]$$

となり、同じ投影面積であっても風荷重の算出においては

標識板/丸鋼管 ≈ 1.7 で 1.7 倍の差がある。

円柱の投影面積と風圧

投影幅 4m、高さ 80mの円柱の場合、風力係数が 0.7 なので、風速 13mの場合の単位面積当たりの風圧は

$$P = \frac{13^2}{2} \times 1.23 \times 0.7 = 72.75 \text{ [N/m}^2]$$

となり、塔の根元にかかる回転モーメントは

$$\int_0^{40} x \cdot 4 \cdot 72.75 dx = 232800 \text{ [Nm]}$$

$$\int_{40}^{80} x \cdot 4 \cdot 72.75 dx = 931200 - 232800 = 698400 \text{ [Nm]}$$

この、698400 のうち、10%が減少すると、 $698400 \text{ Nm} = 7126.5 \text{ Kg 重m}$ だけ減少する。

これを、80m先の位置での荷重の変化と考えると、 $7126.5/80 = 89.08 \text{ Kg 重}$ だけ減ることになる。20%減少すると、80m先の位置で約 180Kg重 の減少となる。30%減少すると、80m先の位置で約 270Kg重 の減少となる。

風速 V のデータはあるので、

V^2 を三角関数で展開して、塔にかかる力を各周波数の外力の和で考える。

$$P = \sum_k (A_k \sin \omega_k t + B_k \cos \omega_k t)$$

と書ける。

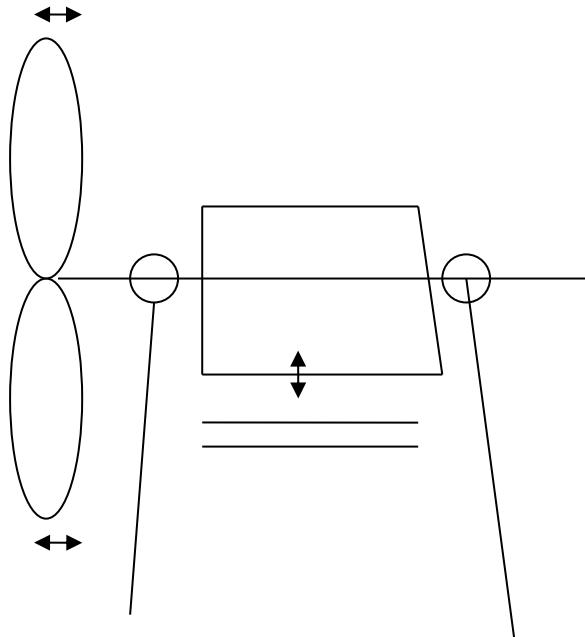
塔の底の振動を考えると、塔の上部は半分が思い発電機で蓋がしてあり、半分は薄い鉄板で超低周波音が自由に透過すると考えると、塔の気柱の固有振動数は 0.18667 の奇数倍の列と偶数倍の列の双方が考えられる。

4.4.5 ブレード回転軸の首振り

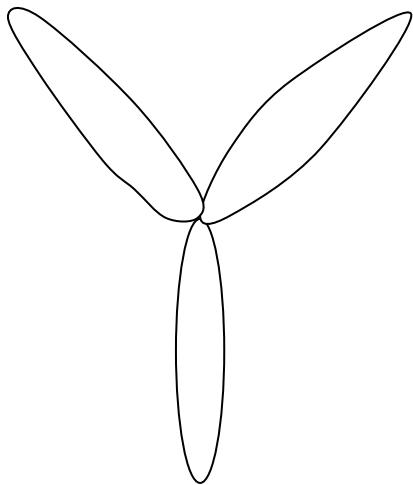
風車の首振り

さらに、

プロペラの部分が、軸を中心に下の図のように揺れる可能性がある。



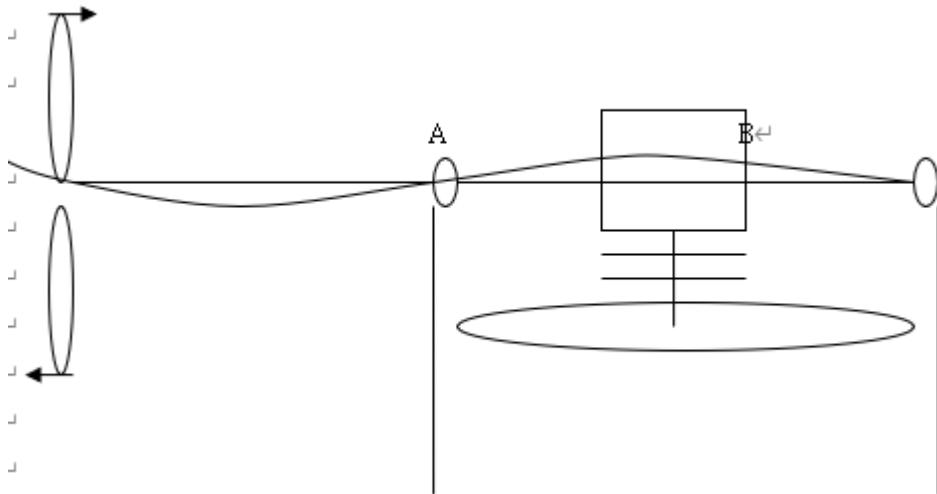
プロペラを・から見たら、



となり、前の図での右向きの回転モーメントは、 $2Fr \sin 30^\circ = 2Fr / 2 = Fr$ となり、左向きの回転モーメントと釣り合っている。

しかし、下向きの羽の後ろには塔があり、他 2 枚の羽の後ろの空気圧よりは少し気圧が高い。したがって、右向きの回転モーメントのほうがやや大きくなる。

したがって、プロペラのシャフトにかかる回転モーメントは



上の図のようになり、発電機が振動版の役割をする。

計測実験では、発電機の下部に平らな板を取り付けて振動板とし、共鳴が簡単になるように底の部分を平らにしておく。空気柱の長さを測り、共鳴する振動数になるようにプロペラを回転させる。

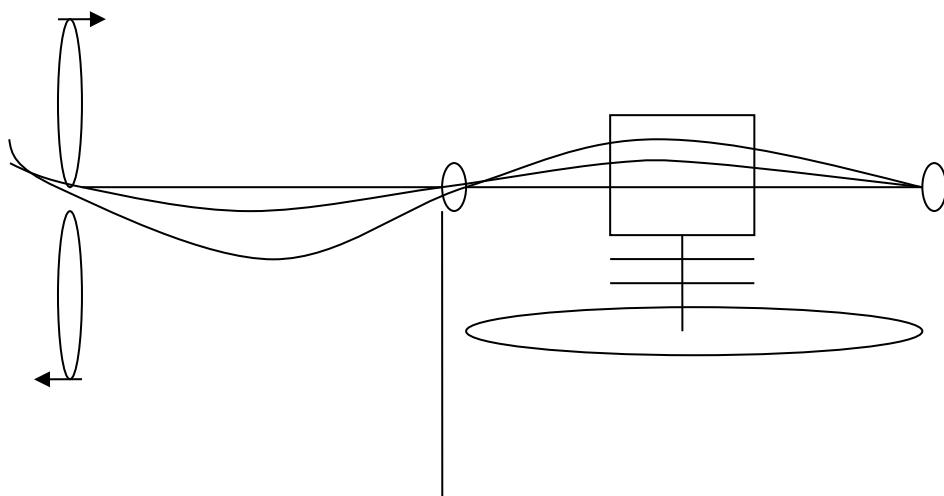
このときの空気柱の共鳴が、節を使って防げることが重要である。

塔の縁の A、B の部分をたたくような運動でもあるので、そのあたりに、ビルの免振構造に使うゴムを使う。塔の底にも、ビルの免振構造に使うゴムを入れる。

このプロペラによる回転軸の曲がりに対して、塔の動きが加わる。

プロペラと塔が重なったとき、塔はプロペラのほうへ動こうとする。これによって軸の曲がり具合は強化される。発電機の垂直方法への振動はより大きくなる。もちろん大きさはオングストローム単位で十分です。

軸は塔によってプロペラのほうに押される。また、空気抵抗を受けるプロペラは塔の方向に向かって押されるので、プロペラの取り付け部分には金属疲労がおこる。



この判断には、発電機の振動や、塔の振動、外部で測った音圧データの FFT 解析が必要となる。しかも、プロペラの回転数を変えながら何回か測って比較する必要がある。

風速は季節によって大きく変化するので長期間の継続的な測定が必要である。実験は風速1m間隔で測定されなくてはならない。

風速20mなどは出現する確率が低いので時間がかかる。外部で測る超低周波音の計測も困難となる。

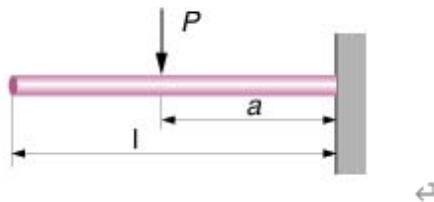
ブレードの動きを測るレーザー光線や装置が雨にぬれることも考えられる。天候が悪いと雷の危険もある。

4.3.2 ブレード（プロペラ）と発電機を考えた場合

たわみについて

図Bに示すように集中荷重Pが固定端からaの位置に作用する長さlの片持ち梁のたわみ曲線、最大たわみを求めよ。

B



まず、先端からの距離Xにおける曲げモーメント M_x を求める。 $l-a=b$ とおき、 $0 \leq X < b$ 、 $b \leq X \leq l$ に分けて考える。 $0 \leq X < b$ の場合、左要素の右断面におけるモーメントの釣り合いから $M_x = 0$ （これは、梁が質量を持たないとして考えている。）

これを積分すればたわみ角の方程式が、2回積分すればたわみ曲線の方程式ができる。

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M = 0$$

$$EI \frac{dy}{dx} = C_1$$

$$EIy = C_1 X + C_2$$

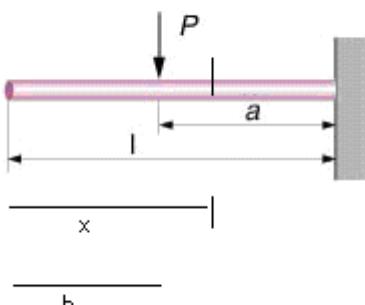
となるが、これは質量がないとしたので直線であるという結果を表します。

$b \leq X \leq l$ の場合は、左の要素の右断面におけるモーメントの釣り合いから

$$M_x = -Px + Pb = -P(x-b)$$

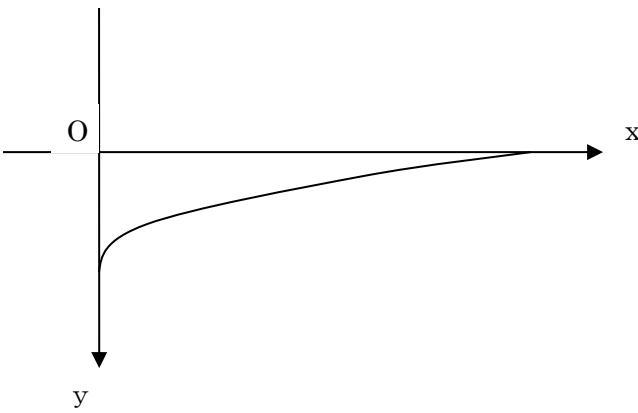
これは、時計の針と反対向きのモーメント(正のもの)と釣り合っている、仮想断面における曲げモーメント(負のもの)を考える。

C



よって、たわみ角とたわみの方程式は以下のようになる。

座標系は



y軸の向きを下に向けてあり、上の図で**x**が増加すると**y**も増える。また曲線は上に凸なので、接線の傾きは減少している。仮想断面の右から負の向きのモーメントが働き、仮想断面の左側から正の向きのモーメントが働き曲線は上に凸となる。

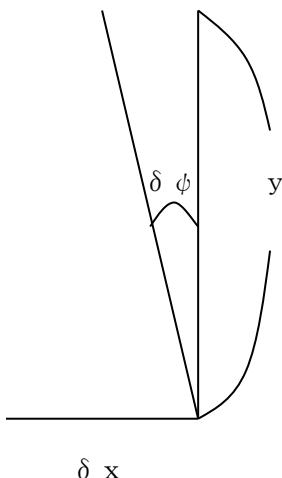
中立層の**y**軸方向の変位を $\eta(x, t)$ とすれば、円柱が曲がるとP、Qの面はともに**x**軸に対して垂直ではなく、さらに、Q面は、P面に対して相対的に傾いている。この相対的な傾きの角を $\delta\phi$ とすれば、**x**-**y**平面での中立層に対する接線の傾きの差を考えて、

傾きが小さければ、 $\tan \theta = \theta$ とすると、 $\delta\phi = \theta_2 - \theta_1 = \tan \theta_2 - \tan \theta_1$ となって、

$$\delta\phi = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{x+\delta x} - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_x = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \delta x$$

を得る。

次に、回転運動については、次のようになる。中立層に平行な断面積 $dydz$ の微小な長方体を考える。もともとの長さ δx だったものが $y \delta \phi$ だけ縮む。



棒のヤング率をEとすれば、P面上の微小部分に

$$E \frac{y \delta \phi}{\delta x} dy dz$$

の力が現れる。

中間層からの距離がyなので、回転モーメントはこのy倍となり、面全体では、中立層とP面の交線abのまわりの回転モーメントは、

$$M_c = \iint_P y E \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy dz = E \frac{\partial \varphi}{\partial x} \iint_P y^2 dy dz$$

となる。これを曲げモーメントという。

$$I = \iint_P y^2 dy dz$$

において

$$M_c = EI \delta \varphi / \delta x = EI \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

を得る。

今は、曲げモーメントは(-M)なので、 η をyと書けば、

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M = Px - Pb$$

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} Px^2 - Pbx + C_3$$

$$EIy = \frac{1}{6} Px^3 - \frac{1}{2} Pbx^2 + C_3 x + C_4$$

となる。**4**個の積分定数を決める条件は

(1) 固定端($x = l$)でたわみ角がゼロ

(2) 固定端($x = l$)でたわみがゼロ

(3) 梁が連続しているから集中荷重Pの作用点($x = l - a = b$)におけるたわみは式②でも式④でも同じ値となるので

$$0 = \frac{Pl^2}{2} - Pbl + C_3$$

$$C_3 = \frac{Pl}{2}(2b - l) = \frac{Pl}{2}(l - 2a)$$

また、

$$0 = \frac{1}{6} Pl^3 - \frac{1}{2} Pbl^2 + C_3 l + C_4$$

$$C_4 = -\frac{1}{6} Pl^3 + \frac{1}{2} Pbl^2 - \frac{Pl}{2}(2b - l)l = \frac{Pl^2}{6}(2l - 3b) = \frac{Pl^2}{6}(3a - l)$$

また、

$$C_1 = \frac{Pb^2}{2} - Pb^2 + C_3 = -\frac{P}{2}(l - b)^2 = -\frac{Pa^2}{2}$$

$$C_1 b + C_2 = \frac{1}{6} P b^3 - \frac{1}{2} P b^3 + C_3 b + C_4$$

$$C_2 = \frac{1}{6} P(b^3 - 3bl^2 + 2l^3) = \frac{Pa^2}{6}(3l - a)$$

したがって、たわみ曲線は $0 \leq X < b$ の場合は

$$EIy = C_1 x + C_2$$

$$y = \frac{Pa^2}{6EI}(-3x + 3l - a)$$

また、 $b \leq X \leq l$ の場合には

$$y = \frac{P}{6EI}\{x^3 - 3(l-a)x^2 + 3l(l-2a)x + l^2(3a-l)\}$$

たわみは $X=0$ で最大となるので

$$y_{\max} = \frac{Pa^2}{6EI}(3l - a)$$

梁のたわみ方は先端から集中荷重 P の作用点までは右上に向かってまっすぐに傾き(この間のたわみ角は一定)、集中荷重 P の作用点から固定端までは上に凸になるように変形している。

ここで、 $b=0$ すなわち、 $a=l$ のばあいには、

$0 \leq X \leq l$ の場合には

$$\begin{aligned} y &= \frac{P}{6EI}\{x^3 - 3(l-l)x^2 + 3l(l-2l)x + l^2(3l-l)\} \\ &= \frac{P}{6EI}\{x^3 - 3l^2x + 2l^3\} \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq X \leq l$ の区間で関数は単調減少なので左端で最大値、右端で最大値をとる。

$x=0$ の場合は、

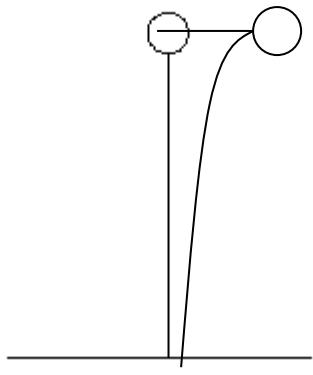
$$y = \frac{P}{6EI}2l^3 = \frac{Pl^3}{3EI}$$

よって、

$$P = \frac{3EI}{l^3} y$$

となる。これは、先端での変位が、加重 P に比例することを示している。

ばね定数を k としたとき、 $F = -kx$ (x は中心からの変位)と同じことになり、



この塔の頭にプロペラ1枚が7t、で3枚で21トン、真ん中が25トン、発電機が84トン
合計で**21+25+84=130**トンが乗っている場合は、単純化して解けば、上の図のように考えて

$$f = -\frac{3EI}{L^3} y \text{ であり、}$$

運動方程式は

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{3EI}{L^3} y$$

となり、单振動の方程式なので、周期は $2\pi \sqrt{\frac{mL^3}{3EI}}$ となる。

$$m = 130 * 1000 \text{ kg}$$

$$L = 80 \text{ m}$$

$$EI = 4.66 * 10^{11} \text{ を代入して、周期は、1.37秒、周波数は } 0.73 \text{ Hz}$$

となる。

5.7 塔の周波数応答

(1) 回転数が大きいのは風が強いと考えて、山の高さは強い風のときは高くなる。

大型風車仕様一覧

機種	FL100	FL250	T600-48	FL1000	FL-1500	FL-2500
出力(KW)	100	250	600	1000	1500	2500
メーカー	ファーランダー	ファーランダー	ターボウインド	ファーランダー	ファーランダー	ファーランダー
ブレード数	3	3	3	3	3	3
ロータ直径(m)	21	29.5	48	54	70	80/90
風車高(m)	36	36	50	60	65	80
ロータ回転数(rpm)	30.5/46	29/39	15/23	15/22	11-22	10.4-18.1
出力制御	ストール	ストール	ピッチ	ストール	ピッチ	ピッチ
カットイン風速(m/s)	2.5	2.5	3.0	3.0	3.0	4.0
定格風速(m/s)	13.0	15.0	12.5	14.5	12.0	13.0
カットアウト風速(m/s)	25.0	25.0	25.0	20.0	25.0	25.0
耐風速(m/s)	25.0	25.0	25.0	20.0	25.0	25.0
発電機タイプ	誘導	誘導	誘導	誘導	誘導	誘導

特徴

3枚羽の風車で、R=10.4～18.1rpm

$$f = 10.4 * 3 / 60 = 0.52 \text{Hz} \text{ から } 18.1 * 3 / 60 = 0.905 \text{Hz}$$

倍音は、1.04Hz から 1.81Hz 間で変化する。

入力が熱エネルギーに変われば、騒音は減るので、塔の下部に耐震構造用のゴムを置く。

塔の部品をつなぐとき間に耐震のゴムを入れる。発電機を押さえるところに耐震ゴムを挟む。

すでに振動防止のゴムはつけてあるようなので、その位置と、取り付け方を自動車のエンジンの取り付け方を参考にして考える。

共鳴を避けるには、周波数応答のピークと、入力信号のピークが重ならないように塔の周波数応答を内部の節によって調節しておく。

消音構造を塔の内部につける。

プロペラについた空気整流器によって、空気の渦を抑えて、プロペラからの直接的な騒音を減らす。

8.2.9 風力発電施設から発生する騒音についての諸見解

風車の騒音について調べ始めてから気がついたことは、風車のブレードの振動、塔の振動、ブレードの回転数と塔の振動の関係や外部で計測される音波のデータの継続的で正確なデータがインターネット上では公開されていないということに驚きました。データをお持ちの方々が分析可能な数値データをその計測状況と共に公開してくださることを望みます。
私が計測したデータは、こちらで公開しています。自由に使って下さい。

風車の塔が巨大なスピーカーとなり、風車の回転数が特別な値になるとき、塔の中の空気の柱が共鳴し、大きな音圧の超低周波音を発生する理由はすでに示しました。

超低周波音(1Hz～20Hz)を扱う事が多いのですが、超低周波音(0Hz～20Hz)についての考察が必要なのです。

昔考えていた時の結論は、次のようなものでした。

風車の設計過程で得ている固有振動数に関する情報を公開すること。

1. 固有振動数の公開

建設する風車について、ブレードの固有振動数、タワーの固有振動数、プロペラと塔を一体の物と見たときの固有振動数を公開すること。

振動や音圧を風速が1m変化するごとに同時に測定すること。

2. 塔の振動に関する測定

塔の長さが異なる場合のいくつかの風車について超低周波音の測定を精密に行う。

とくに、回転数、塔の中の空気柱の長さのデータと共に正確に記録する。

ブレード(プロペラ)の回転数だけではなく、ブレードの振動する様子についてレーザー光を使って把握する。ブレードの固有振動数が超低周波音の原因と見ることもできる。

塔の動きは、プロペラの軸に平行な方向と垂直な方向の両方を測り、超低周波音との関連が明確になるようになる。回転数、風速、土台の鉛直方向の動き、などを同時に測る。風速や回転数ごとに長期的に計測する。塔の変形についてはレーザー光線の利用も有効と考える。

振動計測の機器は、発電機の下部の面、側面、塔の上部8箇所、中央部8箇所、下部8箇所、塔内の地面1箇所、塔外の地面1箇所。

3. 音圧の測定

1基の風車について、騒音が指向性を持つならば風車の塔の全体的には変形の仕方が音圧の変化の仕方と深く関連した動きになっているといえます。断面の円が2方向へ橢円として変形することが考えられます。風車が向いている方向とそれに対して直角の方向には強く音が出て斜め45度の方向へは弱い音が出ると考えられます。

確認するには、1つの風車に対して、プロペラの向いている方向を基準にして8方向から同時に音圧を測定します。しかも、音の減衰の状態を調べる必要もありますので200m、400m、600mの距離で測る必要があります。同時に24台の測定器を使います。

風車群については、低周波の測定地点は塔の列に垂直な方向と、塔の列に平行な方向についてそれぞれ300mおきに10台ずつ、合計20台で、風車から3000mまで測る。騒音計を設置するのは室内とし、すべての計測器を同じ環境におく。計測場所の確保が困難なら、穴を掘って穴の中に機械を入れて計測する。この低周波音の測定は音源の形を決定する資料にもなるので、風車を1基だけ動かしたときのものと10台程度を同時に動かした場合の両方が必要となる。

これらの計測は、同時にい、音の到達までの時間差を処理できるような長さとする。サンプリングは可能ならば、0.01 秒以下の短い間隔で行う。

これらの測定をもとに、風車のプロペラの回転数と超低周波音のピーク値と周波数の関係を精密に調査する。FFT と Wavelet で音圧の変化を直接解析することが必要です。1/3 オクターブ解析では精度が悪すぎます。騒音対策としては、

騒音の発生を極力抑える。

4. 塔の下部と継ぎ目に耐震用のゴムを入れる。発電機の支えの部分にも耐震ゴムを入れる。車のエンジンを取り付けるときのやり方を参考にして、発電機の取り付け方法を考える。

4. 風車の回転軸の首振りを抑えるために、ブレードの角度をコンピュータ制御する。

5. 風車の羽に、新幹線のパンタグラフのような整流のための突起をつける。

これは、小型風車で特許申請がされているようですが、新幹線のパンタグラフが先なのか小型風車での特許申請が先なのかは不明です。ブレードの形、特に先端部の形状については研究がされているようです。

振動が発生しても塔内の空気柱が共鳴しないようにする。

6. 塔の中に節を作る。2Hz 対策は、塔の中央より少し上に節をつくり、3. 15Hz 対策は塔の下から 1/3 のところより少し上に節をつくる。材質は自動車の消音対策の人相談する。

もちろん、結果は公開する。計測は立場の異なる人の機械も同時に設置する。計測結果が一致しないときは原因を追究し一致するまで行う。もちろん、一致しないデータも含めてすべてをインターネットに公開する。伊豆の風車で騒音の計測や、節や塔内の消音装置で消音の実験をしてください。

風車には、ブレード(プロペラ)やタワー(塔)の固有振動数、ブレードの回転数、塔内の空気柱の共鳴など、超低周波音の原因が存在します。その計測には、風速、風車の回転数、振動、各部品の固有振動数などと、外部での音圧の関連を正確に調査しなくてはなりません。1m刻みの風速についての正確なデータが必要です。

風車を建設される会社の皆様、超低周波音の被害がないというならば、各論点について正確な理論と計算、実験、計測、分析に基づいた反論をお願いします。そして正確な計測結果を公開してくれることを望みます。

風速の出現確率をみると、風速18mから20mのあたりの計測データを得るのは難しそうですが根気強く計測しましょう。

(b) 風速分布

ある期間における風速階級毎の出現率（頻度）を風速の出現率頻度分布と呼び、一例を図 4.2-14 に示す。風速の出現率分布は、図からわかるように、左右非対称で、出現率の最大は弱風側に偏っている（図中の曲線は後述のワイブル分布を当てはめた場合を示し、尺度係数 c 値 = 5.9、形状係数 k 値 = 1.3 となっている）。また、風速出現率を、風速の大きい方から順次に加算累積したものを累積出現率と呼び、それを風況曲線として図 4.2-15 に示す。

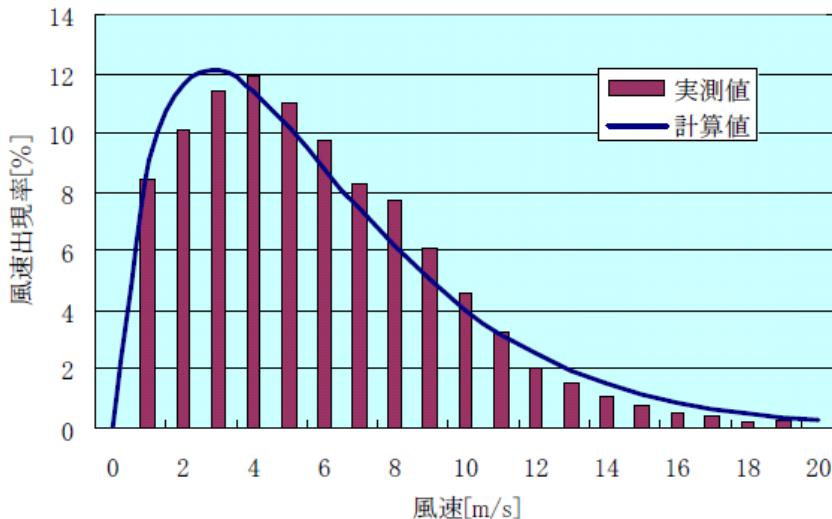


図 4.2-14 風速の出現率分布（例）

私の分析の問題点や、計算の誤りなどがありましたら、“uyama33@yahoo.co.jp”までメールでお知らせください。

これらの事が、昔の考察が結果です。

もちろん、部屋の形は管のような形ではないので、3次元空間を意識して考える必要がある。

三次元音場の固有モード

5.1 直方体室の固有振動

一般の室内では、三次元の空間の中の音波を考えねばならない。Chapter 1 で述べたように、平面波に関する三次元の波動方程式は、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right)$$

C:音速

である。三次元の速度ポテンシャルは、この解として与えられる。([三次元の速度ポテンシャル](#))

いま、図のように各辺の長さが l_x, l_y, l_z の直方体の室を考える。

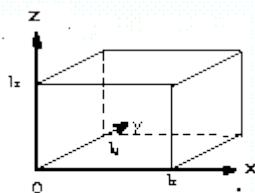


図3.2 3次元室の座標

その周壁が全て剛壁の場合、境界条件は壁面上で壁に垂直方向の粒子速度が0、である。この条件下で三次元の固有周波数を求める

一次元の固有周波数

$$f_m = \frac{cm}{2l_x}$$

と同様、

$$f_n = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x \pi}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{l_z}\right)^2}$$

ただし、 n_x, n_y, n_z はそれぞれ0、1、2、3…となる。一次元の粒子速度の室内分布

$$\sin\left(\frac{m \pi x}{l_x}\right)$$

と同様に、その粒子速度の室内分布は定在波として

$$\sin\left(\frac{n_x \pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{l_y}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{l_z}\right)$$

で表わされ、音圧分布も、一次元の分布

$$\cos\left(\frac{m \pi x}{l_x}\right)$$

と同様に、

$$\cos\left(\frac{n_x \pi x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{n_y \pi y}{l_y}\right) \cos\left(\frac{n_z \pi z}{l_z}\right)$$

の定在波で表わされる。また音圧の式は、

$$\begin{aligned} p &= \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ &= j \omega \rho A \left| \cos\left(\frac{n_x \pi x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{n_y \pi y}{l_y}\right) \cos\left(\frac{n_z \pi z}{l_z}\right) \right| e^{j \omega t} \end{aligned}$$

となる。なお、音圧は粒子速度が 0 となる剛壁上で振動の最大値(腹)が生じ、粒子速度の振幅が最大(腹)となる点で逆に振動の最小値(節)を生じている。

さて、この3次元音場の固有振動は nx , ny , nz の任意の組合せによって、

一次元モード、二次元モード、三次元モードの3種類に分類される。

詳細は、室内での振動と、室内での音圧、室外での音圧の計測結果に踏まえて検討しなくてはなりません。

8.3 風車音の物理的影響

8.3.1 “怪奇現象”と共振

さて、次の資料は、日本大学の町田氏の講演会資料にあるものです。

新聞報道にみる低周波音の取り上げ方

1998(平10)年12月
6日 読売新聞

雨降ると戸障子ガタガタ1年余



見えない理由で大騒ぎになった秋田県大出町の真木地区

怪現象に揺れた山里

靈魂説まで飛び出した 6世帯住民「何かわからぬ

▲このダムの超低周波が犯人

でも発生の条件はナゾのまま

音なし騒音公害「犯人は 低周波空気振動」朝日新聞 1975(昭50)10.3

現場発
秋田・太田町

町田氏は、新聞報道での“怪奇現象”に対して、共振と言う答えを示しています。

“よくわかる低周波音・環境省”には、

1. 低周波音とは

低周波音の建具などへの影響は？

建具の低周波音に対する反応は、低い周波数では人の感度よりも良く、揺れやすい窓や戸では、5Hzで70dB、20Hzで80dB程度の低周波音によってがたつく場合があります。



とあります。

重要なのは、“揺れやすい窓や戸では、5 Hz で 70 dB、20 Hz で 80 dB” となっている部分です。周波数が低い5 Hz の場合は、弱い音の程度 70 dB でも建具がゆれやすいと言うところです。

この現象は、共振か単なる強制振動ですが、ビルや建物、家具などの固有振動数が重要なポイントとなります。

気象庁の HP の解説では、

長周期地震動って何？

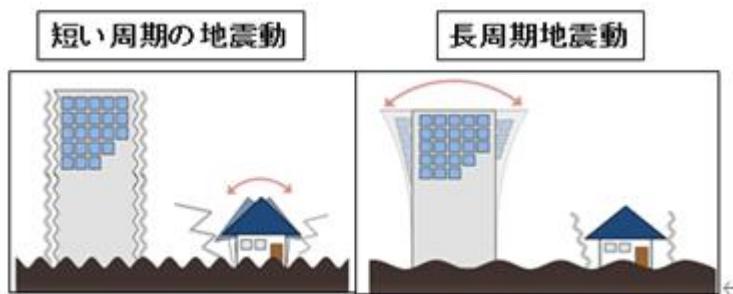
地震が起きると様々な周期を持つ揺れ（地震動）が発生します。ここでいう「周期」とは、揺れが 1 往復するのにかかる時間のことです。南海トラフ地震のような規模の大きい地震が発生すると、周期の長いゆっくりとした大きな揺れ（地震動）が生じます。

このような地震動のことを長周期地震動といいます。

建物には固有の揺れやすい周期（固有周期）があります。地震波の周期と建物の固有周期が一致すると共振して、建物が大きく揺れます。

高層ビルの固有周期は低い建物の周期に比べると長いため、長周期の波と「共振」しやすく、共振すると高層ビルは長時間にわたり大きく揺れます。また、高層階の方がより大きく揺れる傾向があります。

長周期地震動により高層ビルが大きく長く揺れることで、室内の家具や什器が転倒・移動したり、エレベーターが故障することがあります。



高層ビルは、短い周期の揺れは、「柳に風」のように、揺れを逃がすよう柔らかくできていますが、長い周期の揺れがあると共振してしまい、大きく・長く揺れることがあります。

ビルの高さによる揺れの違い

建物の揺れやすい周期（固有周期）は、高さによって異なり、一般的に高いビルほど長い固有周期をもちます。同じ地面の揺れでも、建物の高さによって揺れ方は異なります。また、地面の揺れの周期と建物の固有周期が一致すると、その建物は大きく揺れます。

となっています。

ダイワハウスの PH の解説では、

建物の固有周期はどのように決まるのでしょうか。

「建物の固有周期」とは、その建物が 1 回揺れる時間の長さで、建物の高さや固さによって決まります。一般に、建物が高いほど長く、低いほど短くなります。30 階程度の超高層建物では 4~7 秒程度で、10 階程度だと 0.5~1 秒程度と言われています。

通常の地震は揺れの周期が短いため、固有周期の短い低いビルや戸建て住宅は共振しやすく、超高層ビルは共振しにくいとされています。逆に、4~7 秒の長周期地震では、超高層ビルや石油タンクも影響を受けます。2003 年の十勝沖地震では、「長周期地震で石油タンク内の液体が共振して激しく揺れ、タンクの浮屋根を動かして火花が発生、あふれた石油に引火して火災が発生したことで、長周期地震が注目されました」と、近藤は語ります。

となっています。

たとえば、4~7 秒の長周期地震だと、1 秒あたりの揺れの回数は、0.25 回から 0.14 回となります。振動数は 0.25Hz から 0.14Hz ということになります。

さて、“5 Hz で 70 dB、20 Hz で 80 dB” で建具がゆれやすいと言うことですが、普通の住宅はどの程度の周期的な刺激があれば揺れ易くなるのでしょうか？

熊本地震で倒壊した建物の調査から、それは、0.5Hz から 1Hz だと分かります。
もちろん、家は建具より大きく、高層ビルよりは小さいので、5Hz から 0.25Hz の間であることは明白です。

熊本地震の被害に関しては、秋山英樹による研究報告があります。

熊本地震はなぜ被害が大きかったのか
グリーンレポート

4月 14 日の熊本大地震について、地震の専門家ではありませんが、テレビなどマスコミでは分かりにくいことについて解説してみます。

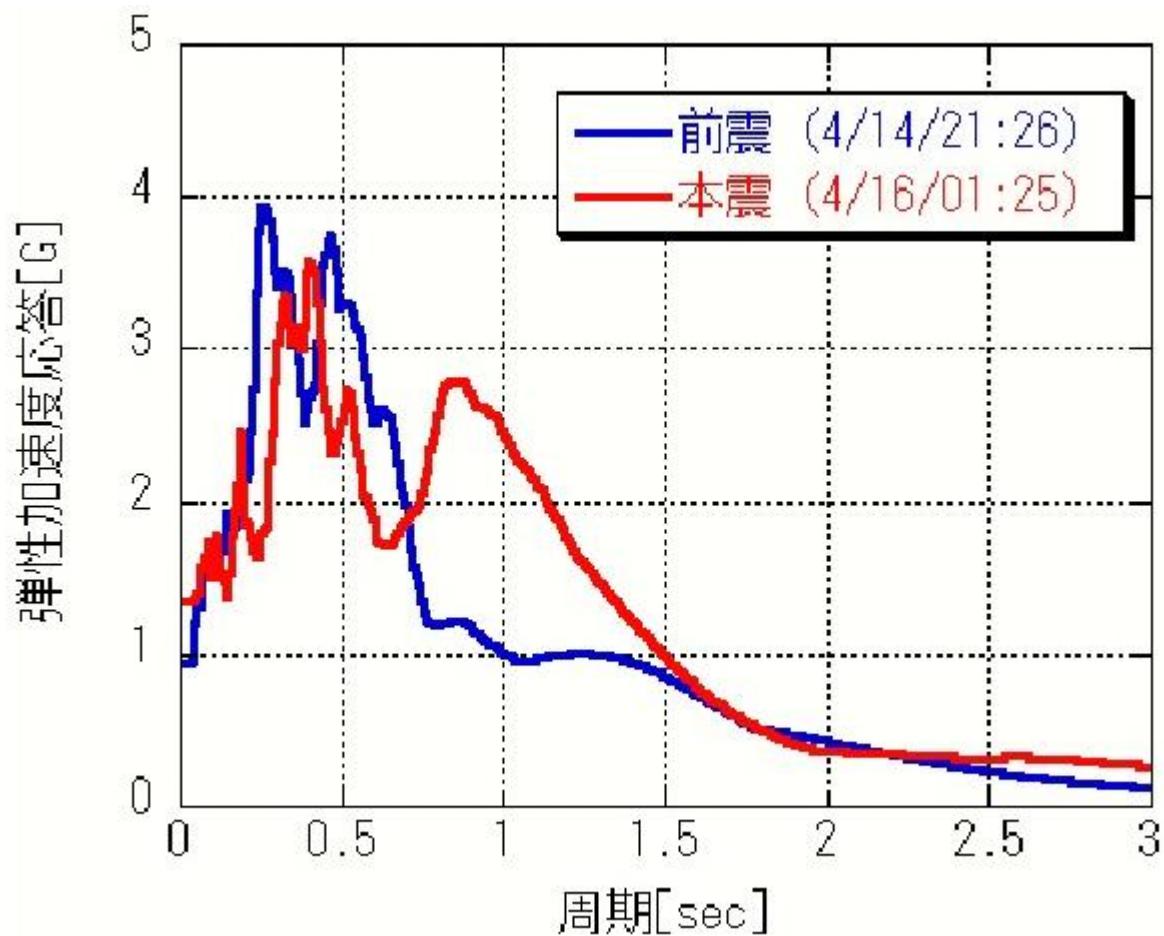
最初の地震は前震ということでしたが、最大震度が 7、マグニチュード 6.5 と地震の大きさを示すマグニチュードの割には震度が 7 と大きかったのは震源が浅かったためです。揺れが大きかった割には朝になって全貌がテレビで確認できたときも被害は思っていたほどではありませんでした。

そして深夜に起きた本震が最大震度 7、マグニチュード 7.3、一夜明けた全貌は前の日とは大違いで多くの建物が崩壊した悲惨な状況でした。

マグニチュード 7.3 は阪神大震災に匹敵する地震で、前震の 6.5 の 16 倍にも達するということです。今回の地震は、阪神大震災と同様活断層の横滑りという現象で長さ 50 km の断層が水平方向に最大 1.8m、垂直方向に最大 70 cm ずれたということでした。航空写真でよく分かります。

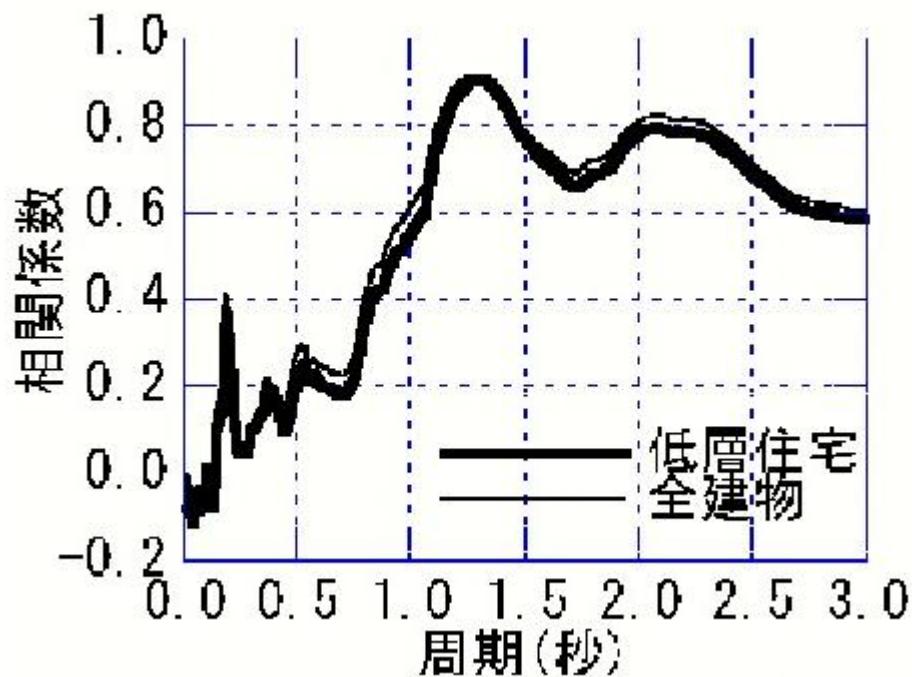


益城における前震と本震の地震の性格をみると下図のようになります。



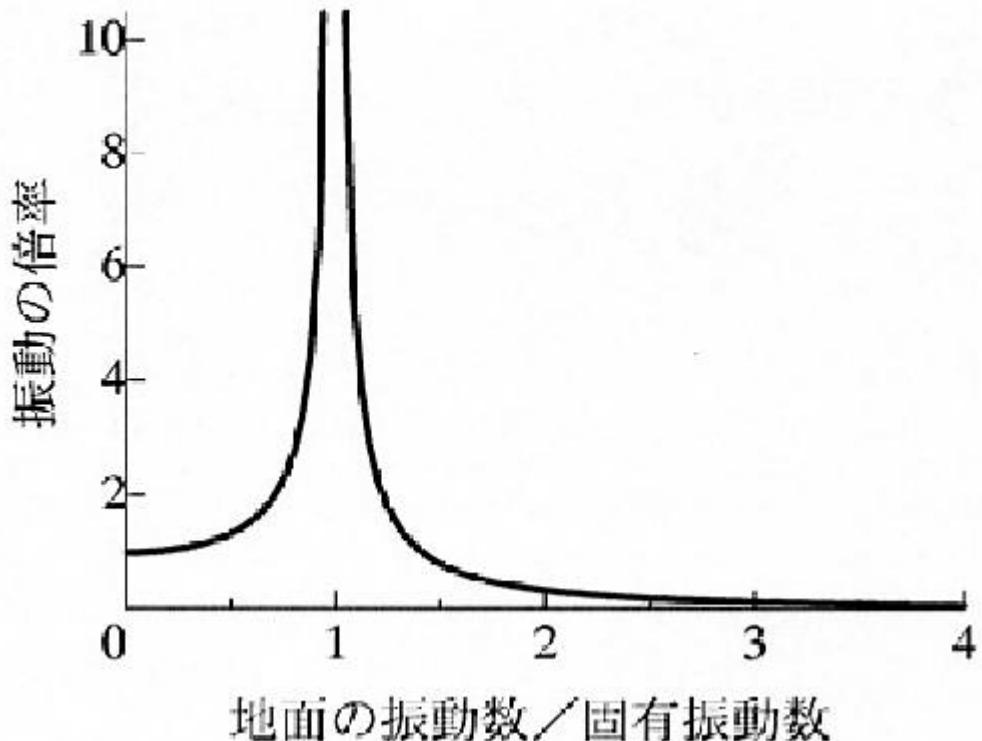
この揺れ方の違いが建物の崩壊率を高めている原因の一つなのです。

下記の図は日本で起こった様々な地震について何秒の揺れの強さが実際の建物被害と対応しているかを示したものです。縦軸の相関係数が大きな値の周期が建物被害と対応していると言えます。



これを見ると大ざっぱに言って、1-2 秒という 0.1-1 秒より長い周期の揺れの強さが実際の建物被害と対応していることがわかります。

熊本地震では揺れの大きな前震で、建物の固有周期が短い低層の木造建物（ユラユラと動かない堅い建物：固有周期が 0.2~0.5 秒）の柱や梁との結合が緩み固有振動が 1 秒ほどに長くなるのです。そこに、1 秒ほどの周期の本震に見舞われ、共振現象により地震エネルギーは倍増し崩壊につながってしまったと考えられます。



地震は、単に強い弱いだけでなく、ガタガタという揺れ（1秒以下の短周期地震動）、ユサユサという揺れ（1～2秒のやや中周期地震動）、ユラユラという揺れ（2～5秒の長周期地震動）が複雑に混ざり合っているのです。このどの周期の地震動が卓越しているのかにより地震の被害状況が変わるので、ユサユサという揺れがキラーパルスといわれ建物に大きな被害を及ぼすのです。

地震は日本ではいつ発生するかわかりません。熊本では今月の4日に約8mのザトウクジラ、8日には長崎で約7mのザトウクジラが定置網にかかり海岸に打ち上げられていたそうです。地元漁業の話によると、クジラが定置網にかかったり、打ち上げられるようなことは、今まで無かったといいます。いつものことですが、大地震の前には何かしらの前触れがあるようですから、日ごろから非日常的なニュースには注意しましょう。

とのことです。

地震でも、超低周波音でも共振は起こります。強制振動も起こります。せっかく建具の共振を解説しているのだから、戸建て住宅全体としての共振も解説するべきです。

1 Hz の超低周波音は、耳で聞くことは出来なくとも、住宅全体を共振させて、床の振動として普通の人に感知できる刺激になります。これは、聴覚による感知ではありません。これに関しては、精密騒音計のほかに、振動レベル計による計測が必要となります。

従って、どのような刺激が与えられて、人間のどのような感覚がそれを捕らえるのかを解明するには、精密騒音計と振動レベル計のセットで、室内で、同時に、長時間計測する必要があります。幸い、どちらの機械も、セットすれば、自動的に計測してくれます。

騒音計といつてもいろいろです。、リオン社の HP では、次の様になっています。

リオン社の騒音計		
番号	種類	測定範囲
NL-62A	精密騒音計	1Hz～20000Hz
NL-52A	精密騒音計	10Hz～20000Hz
NL-42A	普通騒音計	20Hz～8000Hz
NL-27	普通騒音計	20Hz～8000Hz
NA-28	精密騒音計	12.5Hz～20000Hz

測定範囲ですが、一番低いもので 1Hz からです。これは、計測された音圧レベルが正確である周波数範囲です。必要なのは、次の機材です。

リオン株式会社
精密騒音計（低周波音測定機能付）
NL-62A
HOME > 騒音計 > NL-62A
製品カタログ(PDF)
当製品を国外へ持ち出す際のご注意
特長 | 機能一覧 | オプション一覧 | 接続構成例 | 周辺機器 | 測定事例 | 仕様 | 價格 | 従来製品と新製品の対応表

1 Hz～20 000 Hzまでの広帯域を計測。
低周波音から騒音まで1台で同時に計測します。

標準でオートストップ機能を有し、タイム報知や外部電源による連続測定が可能です。使いやすさにもこだわり、計測中にマニュアルを確認しながら・・・というわざわざい作業を無くしました。画面は大きく見やすいカラーディスプレイ。突然の降雨にも備えうる防水性能をプラスしました。オプションのオクターブ、1/3オクターブ実時間分析プログラムNX-62RTを使用すると、本製品のみで周波数分析まで可能になります。
リオンの精密騒音計NL-62Aは、計測を最大限サポート致します。

精密騒音計
(低周波音測定機能付)
NL-62A

VM-55 振動レベル計
HOME > 振動レベル計 > VM-55
カタログ
VM-55 カタログ(1.24 MB)
取扱説明書
VM-55 取扱説明書(4.68 MB)
VM-55 オプションプログラムのインストール、アンインストール方法(0.96 MB)
VM-55 簡易操作手順書(1.36 MB)
NL-42/NL-52/NL-62/VM-55 PCへのデータ取り込み方法(0.67 MB)
その他の資料
脱制震過対象製品についてのご案内(1.94 MB)
振動レベル計VM-55オートストップサンプルデータ(0.13 MB)
ソフトウェア
波形処理ソフトウェア AS-70 Ver.2.2(115.56 MB)
本ソフトウェアではWAVEファイルを読み込み、グラフ表示、レベル化処理、周波数分析

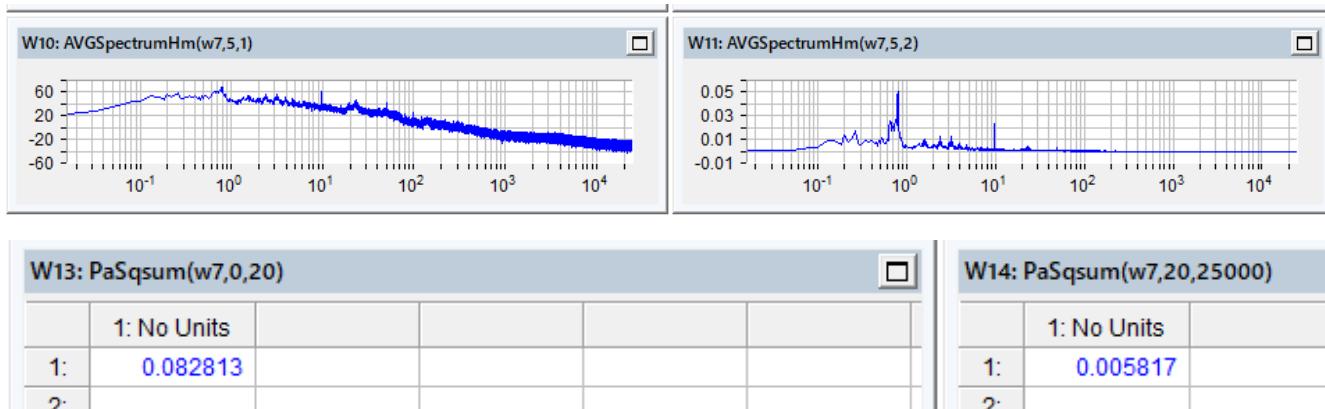
NL-62A (578000 円) + 波形収録ソフト 100000 円

VM-55 (380000 円) + 波形収録ソフト 100000 円

32GB の S D カードを使えば、精密騒音計は 40 時間、振動レベル計は 450 時間の連続した計測ができるので、夕方 18 時から翌朝の 6 時まで、被害が発生している室内で連続的に計測するべきです。

ほとんどの県や市は、必要な機材を持っていても計測してくれません。機材の貸し出しましてもくれません。貸し出してくれるのは、20Hz 以上の音しか測れない普通騒音計です。

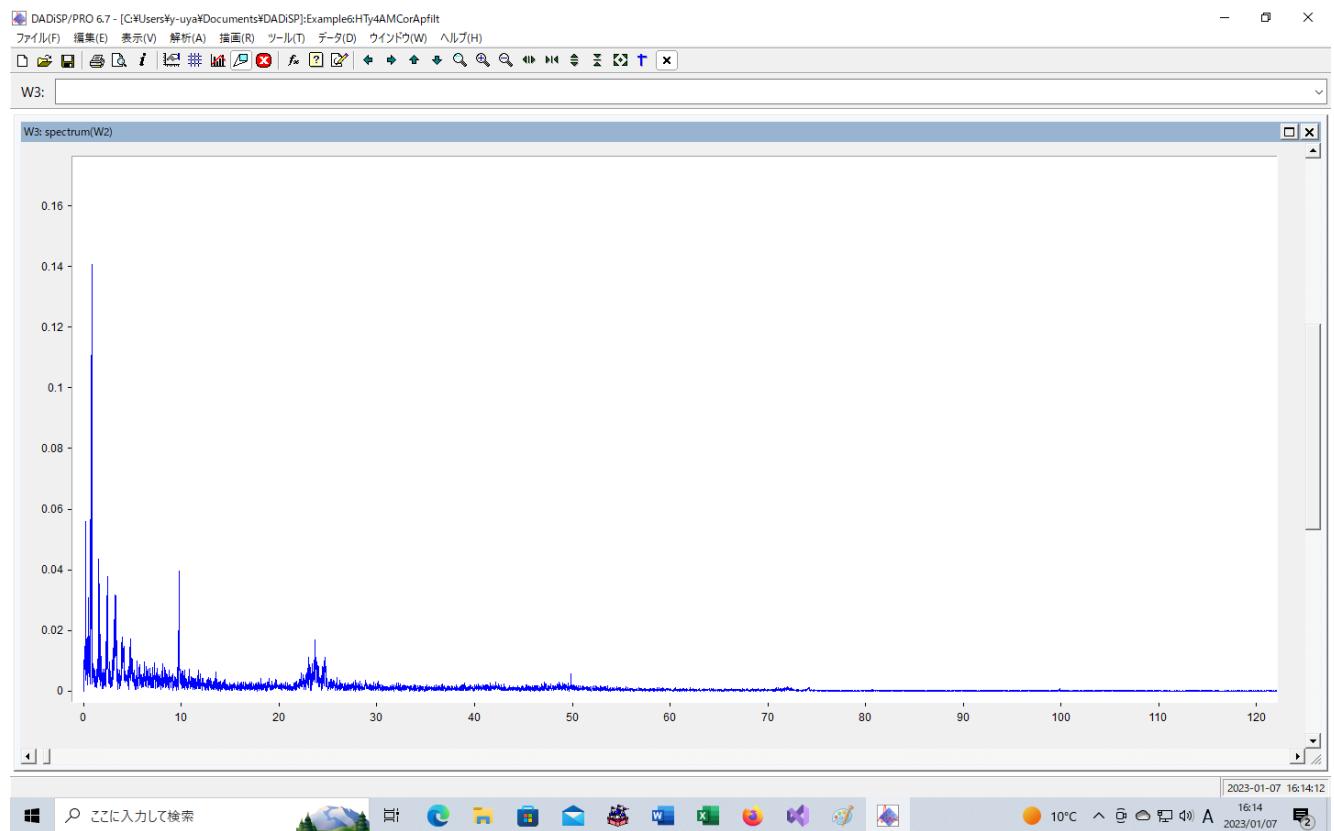
千葉県館山市にある風車の騒音では、



超低周波部分のエネルギーは、20Hz以上成分のエネルギーの 14.2 倍です。（エネルギーの比率は、20Hz 以下は 93.4%、20Hz 以上は 6.6%）

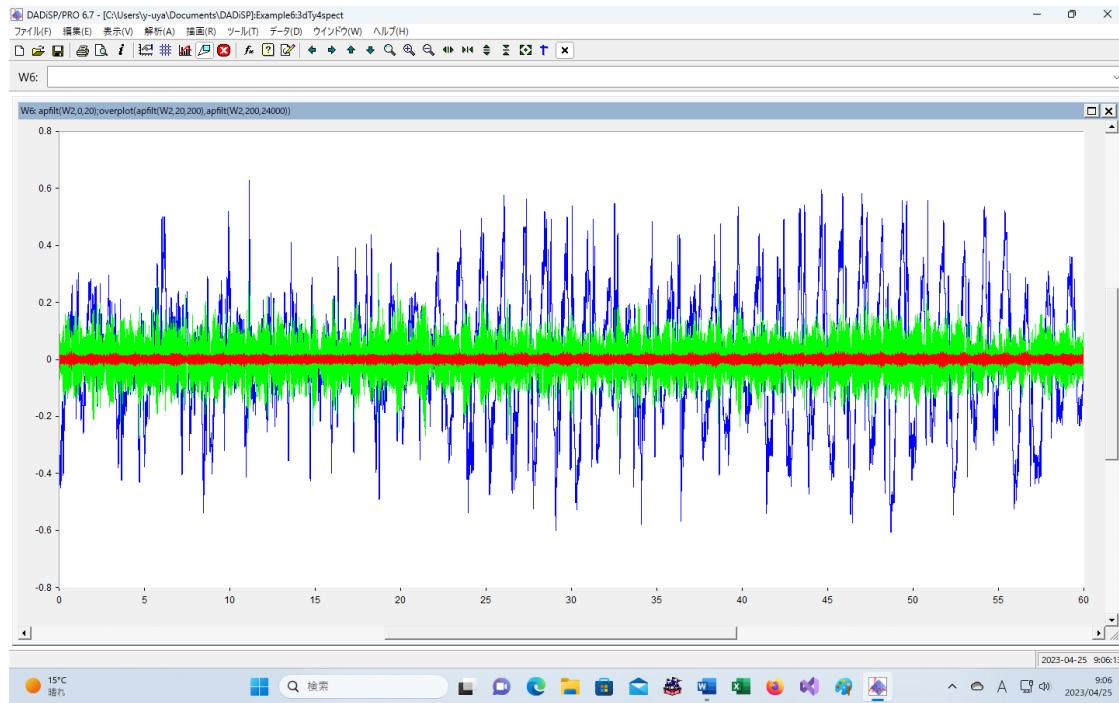
普通騒音計での数値は風車からのエネルギーの 6.6%しか把握できないのです。これでは役に立ちません。

低周波部分を拡大した、周波数スペクトルは次のグラフです。50Hz 以下の成分が大半を占めています。このグラフからも、200Hz 以上の成分は、微弱なものであることが分かります。



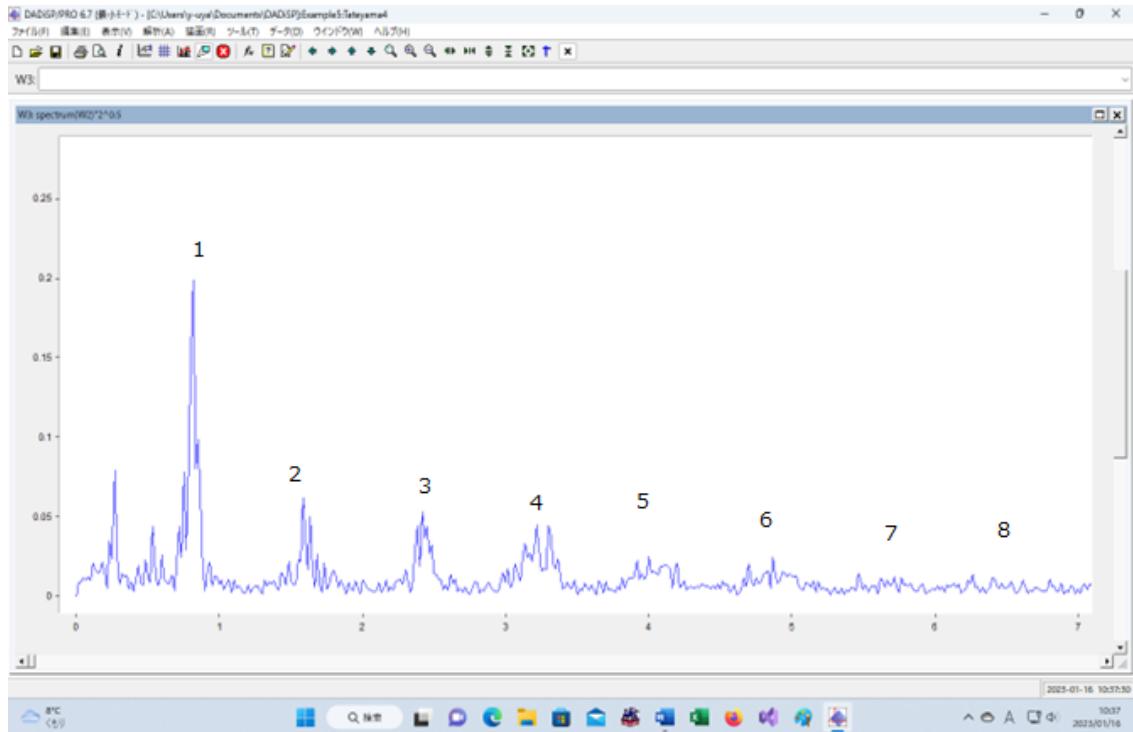
さらに、周波数帯ごとに分割してそれらの強さを比較すると、次のようにになります。

風車音の周波数帯ごとの比較 (0Hz~20Hz 青、20Hz~200Hz 緑、200Hz~24000Hz 赤)



超低周波音 (0Hz~20Hz) の部分が強烈です。

実際の風車音で、計測された音圧（パスカル）の特徴は、周波数の倍音構造です。



音圧（パスカル）がピーク値となるときの周波数に、次のような規則性があるのです。

ピーク値の 周波数	0.816667の倍数			
	倍率1	倍率2	音圧	
0.266667	1		0.05604	
0.533333	1.999996		0.03093802	
0.816667	3.062497	1	0.1405225	0.816667
1.583333	5.937491	1.938774	0.0435531	1.633334
2.416667	9.06249	2.959183	0.02416667	2.450001
3.216667	12.06249	3.938774	0.03173804	3.266668
4.000000	14.99998	4.897957	0.01772484	4.083335
4.866667	18.24998	5.959182	0.01728335	4.900002
5.466667	20.49998	6.693875	0.01009538	5.716669
6.266667	23.49997	7.673467	0.00978232	6.533336
9.783333	36.68745	11.97959	0.03974005	8

この数値は、回転軸が水平になっている風車は、物理学的に見て、欠陥商品そのものであることを意味しています。

構造そのものが、巨大な超低周波音の発生装置そのものであることの証拠なのです。

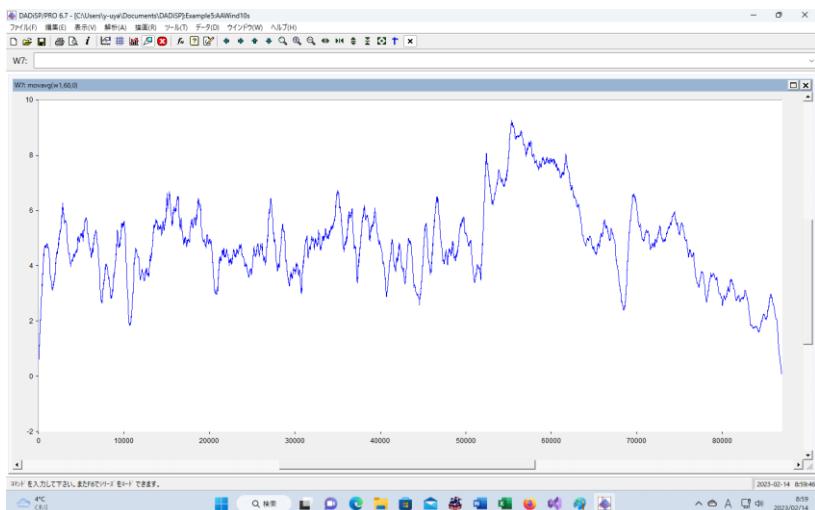
長時間の測定が必要な理由は風の性質にあります。

次の表は、気象庁が計測したデータを、気象業務支援センターから入手したものです。

年	月	日	時	分	秒	前10秒間最大瞬間風速	前10秒間最小瞬間風速	前10秒間風程
						0.1m/s	0.1m/s	
2019	2	2	0	12	40	147	124	132
2019	2	2	0	12	50	146	107	131
2019	2	2	0	13	0	122	82	102
2019	2	2	0	13	10	105	65	83
2019	2	2	0	13	20	112	71	82

(前10秒間風程は、10秒間に風が進む行程を意味します。132は秒速13.2mの風速です。) 風速も風向も不安定なのです。

1日分の風のデータに対して、移動平均をとると、



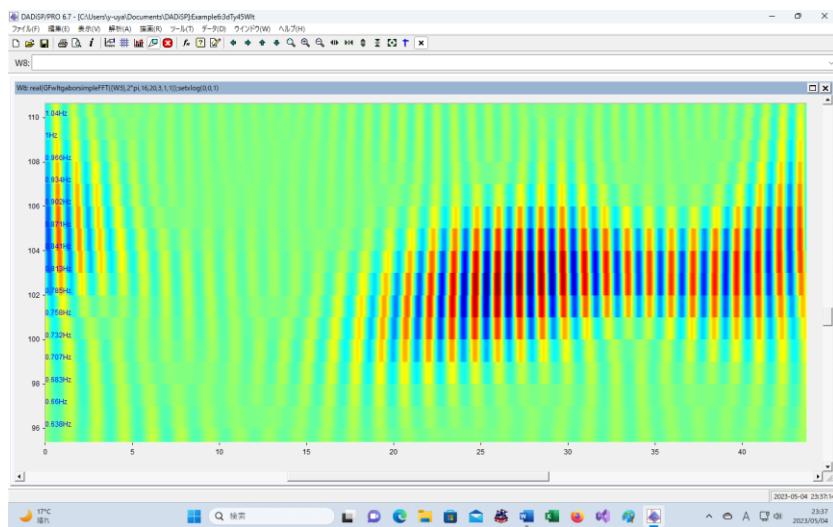
となります。ピーク値は、2820, 5640, 6780, 10070, 15030, 16310, 18720、、秒の辺りです。

秒	分	経過(分)
2820	47	
5640	94	47
6780	113	19
10070	168	55
15030	251	83
16310	272	21
18720	312	40

上の表を見れば、1時間に1回くらい風車に強い風が当たることが分かります。

強い風が当たれば、風車の振動も大きくなります。その結果風車から発生する音も大きくなります。さらに、風車の回転数が変化して、周波数も変動します。この周波数の変動によって、共振域に入ることも考えられます。

次のグラフでは、変動が大きくて、0.71Hz～0.94Hzの間で周波数が変動することが分かります。



風車音を録音した時に、ビデオで風車が回転する様子も撮影しました。ブレードが塔の前を 21 回通過するのにかかる時間を計測して、それを元にして周波数を計算してみました。その変動の様子は、Wavelet 解析での変動の様子と一致します。

7回転		
21回通過	秒	周波数
21	28	0.75
21	22	0.95
21	23	0.91
21	23	0.91
21	24	0.88
21	27	0.78
21	30	0.70
21	24	0.88
21	26	0.81
21	25	0.84
21	26	0.81
21	26	0.81
21	26	0.81
21	26	0.81
21	27	0.78
21	31	0.68
21	31	0.68
21	27	0.78
21	26	0.81
21	25	0.84
21	26	0.81
21	28	0.75
21	28	0.75
平均		0.80

一定の風速があり、風車が回転数を一定に保つ機能を持っている場合には、音圧が最大となるときの周波数は、ブレードが塔の前を通過する回数と、それに要する時間によって決まる。周波数 $f = \text{通過回数} N \div \text{時間} T$ です。ブレードが 3 枚の風車では、回転数を n とすれば、通過回数は $3 * n = N$ 、この間の時間を T とすれば $f = n * 3 \div T$ と言える。

以前、環境省は次の見解を公開していた。

4.1.5 風車

風車の超低周波音の発生原理は基本的には送風機のいわゆる回転音と呼ばれるものと似ている。大型発電用風車の場合は、羽根の枚数が少なく、回転数も小さいために正常運転でも超低周波音を発生することがある。

その基本周波数 f (Hz) は、翼の回転数を R (rpm)、翼枚数を Z (枚) とすると $f = RZ/60$ (Hz)

で与えられ、この基本周波数とその高次の周波数が卓越する。

大型発電用風車の場合は、一般に翼枚数は 1~3 枚 (3 枚が主)、回転数は 30~60 (rpm) 程度であり、基本周波数は数 Hz 以下になる。

と言っていた。さらに対策として、

なお、騒音は空力騒音に対しては翼形状変更で、ナセル (発電機、歯車等) の機械騒音については従来の騒音対策 (主として防振、吸音・遮音対策) で対応可能である。

を主張していた。

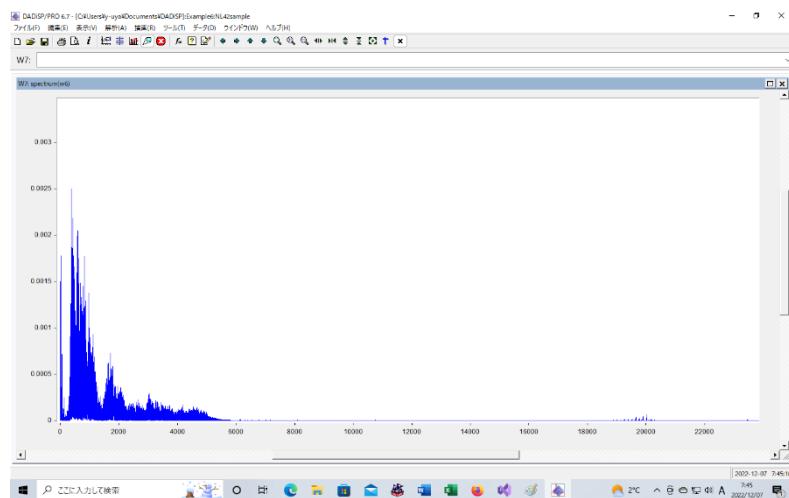
1 分間に R 回転すれば、 $R * 3 \div 60 = f$ となるので、以前環境省が言っていたその基本周波数 f (Hz) は、翼の回転数を R (rpm)、翼枚数を Z (枚) とすると $f = RZ/60$ (Hz)

に対応することになります。

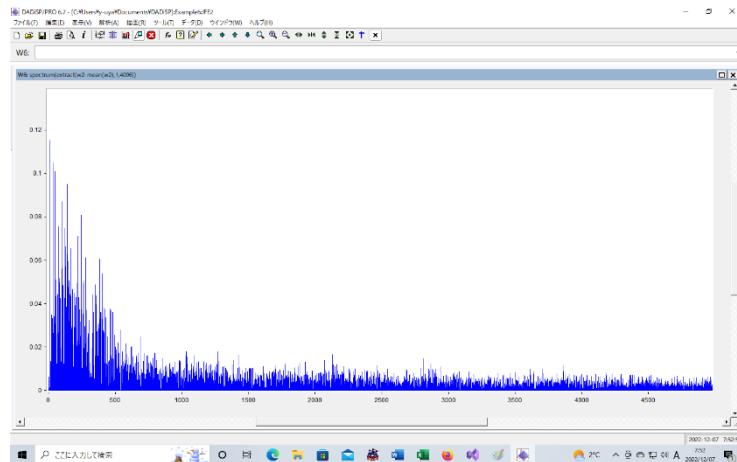
しかしながら、この根拠をしっかりと確認すれば、ブレードが均等な風車からは、 f 、 $2f$ 、 $3f$, ... の周波数の音も出ることが分かるのです。さらに、ブレードに大きさの違いがあれば、($f/3$)、 $2(f/3)$ 、... の系列の音も出のです。

タイプ4:周波数スペクトル

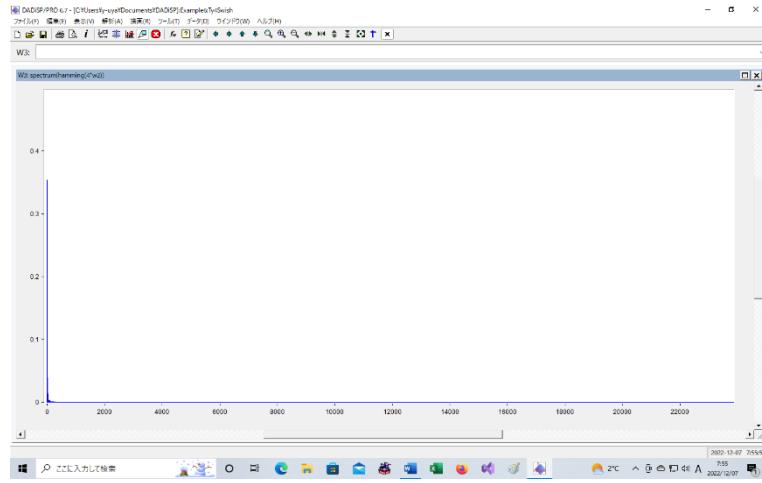
交通騒音 (0Hz 以上)



工場騒音(0Hz 以上)



風車騒音(0Hz 以上)



風車音は、左端の細い線で表されています。

違いが良く分かるのは、タイプ2とタイプ4です。

風の影響で、音圧も周波数も変化するので、実際に起こる共振現象の把握には長時間の計測が必要になります。長時間計測したデータの解析には Wavelet が必要です。各周波数成分の強さの時間的な変化を調べたり、雑音の影響を考えたりする必要があるからです。1/3 オクターブ解析では不可能です。

FFT、SPECTRUM、ShortTimeFFT、での解析も重要です。

計測機器（精密騒音計、振動レベル計、波形収録プログラム、ビデオカメラ）で 150 万円。コンピュータは 20 万円。解析プログラムは 100 万円。合計 270 万円程度で可能です。裁判で勝つには、自分で機材を購入して計測と解析をやればよいのです。

さらに、環境省の“よくわかる低周波音”には

4. 低周波音の苦情にはどんなものがあるの

事例-4 地盤振動によるがたつきの事例

新築家屋の住人から、低周波音により家全体が揺れており、特に2階では揺れがひどく睡眠に支障をきたすとの苦情が寄せられました。

2階では、窓だけでなく、床もカーテンも揺れています¹³⁾。測定の結果、2階寝室では4Hzに大きな成分をもつ低周波音が観測されましたが、庭では大きな低周波音は観測されませんでした。併せて実施された振動測定によると、人体にはっきりと感じられる大きさの4Hzの振動が観測されました。

周囲を調べたところ、発生源は道路を隔てて100mほど離れた工場のプレス機による地盤振動と推定されました。また測定結果などから、家屋も振動しやすい構造であることがわかりました。

その後、工場の複数台ある機械を制御することにより振動が低減し、苦情者も納得したため問題は解決しました。

との記述もありますが、これは原因が工場だったので計測してもらえたと考えるべきです。

風を受けた風車がゆれて、その振動が地面を伝わってくることも考えられます。この観点からも、振動レベル計による計測が必要となります。睡眠が確保できるかどうかを調べるには、夜間に室内で、振動レベル計での計測を行う必要があります。

しかし、県や市の住民に対する対応は、風車音や振動の計測に関しては、塩対応です。

国の方針、低周波音の測定方法に関するマニュアル（平成12年10月）

を見れば、被害の出ている室内での、精密騒音計や振動レベル計による計測をしたくないのがよくわかる。また、原因究明には被害発生地点における、振動レベル計及び精密騒音計での測定により周波数ごとの強さを調べ、振動源となる風車すぐ近くでも振動レベル計及び精密騒音計での測定により周波数ごとの強さを調べ、これらの値の関連を多変量解析で調べる必要があるのに、わざわざ、1/3オクタープ解析とG特性への変換で、正確な分析が出来ないものにしていることもあります。

では、見てゆきます。

低周波音の測定方法に関するマニュアル（平成12年10月）

4.3.2 調査内容 ここでは、主に苦情が寄せられた場合の予備調査を中心に、調査のポイントについて述べる。調査項目は、基本的には窓口、電話等における状況調査とほとんど同様である。

(1) 現象を感じる場所 建具のがたつきが発生する場合、室内のどの建具ががたつくか、そのときの室内の各建具の開閉状況はどうであるかを確認する。低周波音は波長が長いので、がたつきが発生している方向に必ずし

も発生源があるとは限らないので注意する。心理的、生理的苦情がある場合には、屋外と屋内で低周波音を感じられるか、聞こえるか確かめる。屋内では窓を開閉してみるとよい。可聴域の低周波音では図-4.3に示すように室内で定在波が生じて、局所的に音が大きい場所、小さい場所が存在することがあるので、室内を移動して特に大きく感じる場所があるかどうかも確かめることとよい。図では左右方向で強さが異なっているが、高さによってレベルが異なることもある。可聴域の低周波音では、室内の場所によって音の大小が存在する場合がある

図-4.3 室内で定在波が生じた場合の音圧分布

(2) 現象の発生性状（持続的か間欠的か）可聴域の低周波音であれば、低周波音（あるいは現象）の発生性状が持続的か間欠的かは耳で確認できる。大きな音圧レベルの超低周波音が発生している場合には、低周波音圧レベル計のメーターの動きで性状を確認することができる。

(3) 耳で聞こえるか 可聴域の低周波音は、苦情が発生するくらいの音圧レベルの低周波音が発生していれば耳で聴いてわかる（知覚される）。ただし、低周波音の感覚閾値は個人差が大きいので、複数の調査員によって確認することが望ましい。特に機械等が稼働したり停止したりする場合はわかりやすい。超低周波音の場合はかなり大きな音圧レベルが発生している場合でないと、なかなかその存在に気づかない。屋外の場合は、周囲の騒音によりマスクされてわかりづらいことが多い。

(4) 建具等が振動するかしないか 特に揺れやすい建具の場合、超低周波音で建具が微振動することにより二次的な騒音が発生することがある。一般に金属製の建具は木製建具より揺れにくい。特にアルミサッシなどでクレセントをしてある（施錠してある）場合には、音圧レベルが大きてもがたつかないことが多い。建物の外側から、建具の微振動を励起させるような超低周波音が発生しているかどうかの見当をつけるには、建物の外部に面した建具を見るとよい。窓等が揺れているかどうかは、窓面の動き（窓に写り込んだ景色の動き）でわかることが多い。工場・倉庫などのシャッターや、トタンや鉄板などでできた簡易の塀や面積の大きい看板等を手で軽く触ってみるとよい。この方法は、高い音圧レベルの超低周波音が発生している場合には有効である。

(5) 苦情との対応 苦情者宅を訪れる場合には、調査員の体感または物理量（低周波音圧レベル計の音圧レベルの変化）と苦情者の反応が対応するかどうかに注目する。苦情者の反応と物理量が対応していれば、低周波音がその要因の一つである可能性が考えられる。

(6) 周辺の状況 苦情対応では、苦情者の周辺に大きな音圧レベルの低周波音の発生源があるかどうか調査する。低周波音の発生源がはっきりしている場合の実態調査、発生メカニズムの解明、対策効果の測定等を行う場合には、対象とする低周波音以外の発生源がないか、ある場合には稼働状況等を確認しておく必要がある。できればカメラ、ビデオ等で現場の状況を記録しておくと、後で役に立つことがある。

(7) 測定点候補地の選定 苦情対応、発生メカニズムの解明、対策効果の確認のための現場測定を行う場合には、あらかじめ測定に適した場所を選定する。測定点の選定条件については次の章で述べる

5.1.5 測定場所および測定点の選定

測定点は、原則として問題となる場所の屋外とするが、必要に応じて屋内にも設ける。

(1) 屋外における測定 屋外の測定点の選定にあたっては、暗騒音レベルが高くて対象となる低周波音が精度良く測定できない場所や、建物や地形による音の反射、遮蔽、回折によりごく局所的に音圧レベルが変化する場所は避ける。一般的環境低周波音を測定する場合、騒音測定の場合（騒音では建物より3.5m以上離れることになっている）よりも広い範囲の地形や建物の影響を受けるので、これらによる反射の影響がないかどうかを十分確認の上測定点を定める。マイクロホンの高さは地上1.2~1.5mの高さとするが、風の影響がある場合は、地上に置いてもよい。機械、工場建物内外などの測定は、騒音の測定（例えば、騒音レベルの測定）に準じて測定点を決める。

遮蔽物、反射物の有無による音の伝わり方の違いを図-5.1.5に示す。

(2) 建物の周囲における測定 低周波音の影響を受けている住宅などにおいて測定を行うとき、マイクロホンは音源方向に面した所、例えば実用的には窓の外側で窓から1~2m離れた場所で建物の問題となる階の床上1.2~1.5mに相当する高さに設置する。低周波音は騒音に比べて波長が長いので、建物から数m離れても反射、遮蔽、回折等により局所的に音圧レベルが変化する場合がある。ある点の音圧レベルを決めるとき、その周囲数点で測定し、大きな差ができるかどうかを確認する程度のことは常に心がけるとよい。低周波音の発生源がはっきりしている場合には、低周波音の影響を受けている住宅の近傍に加えて発生源近傍（例えば、敷地境界など）にも測定点を設け、同時に測定することが望ましい。

5. 1 測定計画

5.1.1 測定量

(1) 低周波音の感覚及び睡眠への影響に関する評価に用いる測定量

超低周波音の感覚及び睡眠への影響に関しては、G特性音圧レベルを測定する。G特性を持たない低周波音圧レベル計を用いる場合には、実時間周波数分析器等を用いて1/3オクターブバンドで周波数分析を行い、周波数分析結果にG特性補正值（表-1.1参照）を加えた後、エネルギー加算してG特性音圧レベルを計算で求めてもよい。なお、衝撃性の超低周波音の場合は、オクターブバンド音圧レベルからG特性音圧レベルを求めるのが望ましい。G特性音圧レベルの計算例を表-5.1に示す。また、必要に応じて低周波音の周波数分析を行い、1/3オクターブバンド音圧レベル（衝撃性の超低周波音の場合は、オクターブバンド音圧レベル）を測定する。

(2) 低周波音の建具等のがたつきに関する評価に用いる測定量

低周波音の建具等のがたつきに関する評価に関連する測定は、実時間周波数分析器等を用いて低周波音の周波数分析を行い、1/3オクターブバンド中心周波数1~50Hzの1/3オクターブバンド音圧レベルを測定する。

(3) 低周波音の圧迫感・振動感に関する評価に用いる測定量

低周波音の圧迫感・振動感に関する評価に関連する測定は、実時間周波数分析器等を用いて、1/3オクターブバンド中心周波数1~80Hzの1/3オクターブバンド音圧レベルを測定する。

とあるが、

次の記述は特にひどい。

“(2) 低周波音の建具等のがたつきに関する評価に用いる測定量

低周波音の建具等のがたつきに関する評価に関連する測定は、実時間周波数分析器等を用いて低周波音の周波数分析を行い、1/3オクターブバンド中心周波数1~50Hzの1/3オクターブバンド音圧レベルを測定する。”

本当に、がたつきを調べる気が有るなら、振動レベル計を設置して、夜間の継続的な計測をするべきである。がたつきの原因となる共振を調べるには、周波数を特定する必要があるのだから、1/3オクターブ解析を使ってはいけない。

現在の大型化した風車から出る音で、最も強い音圧を持っている周波数成分は、0.5Hzや0.8Hzなのです。中心周波数を1~50Hzとしたのでは、この部分は計測から除外されるのです。最大の問題点を無視して計測するのが、國の方針なのです。

このマニュアルの元になったものは、

https://www.env.go.jp/air/noise/wpg/01_161125_huusyasouon_report.pdf

にある、

風力発電施設から発生する騒音等への対応について

平成28年11月

風力発電施設から発生する騒音等の評価手法に関する検討会

です。

この会議に参加された人の理解力と判断力には、大きな疑問を持たざるを得ません。

8.3.2 ガタツキ閾値

風力発電の会社 GPI は令和 4 年 5 月（2022 年 5 月）に“平木阿波ウインドファーム事業に係る環境影響評価準備書”を公開しました。その、837 ページに、素晴らしいグラフを提供してくれました。

GPI は、準備書 834 ページで、

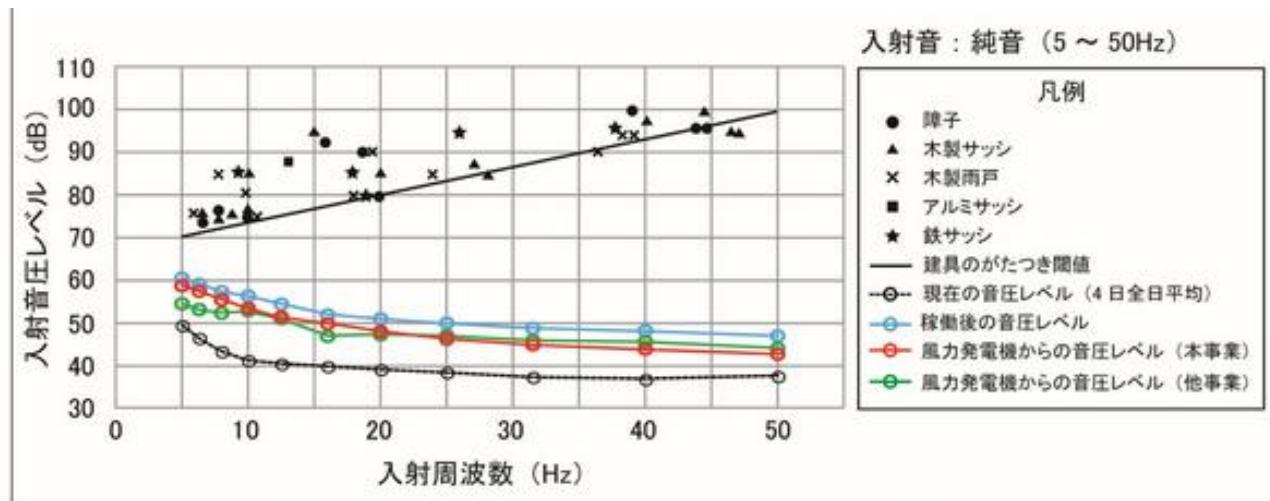
1/3 オクターブバンド音圧レベル（平坦特性）についての「建具のがたつきが始まるレベルとの比較結果」を、後述の累積的影響を含めて示した図 10.1.4-7 に、「圧迫感・振動感を感じる音圧レベルとの比較結果」を図 10.1.4-8 に示す。

「建具のがたつきが始まるレベルとの比較結果」では、全ての予測値が建具のがたつきが始まるレベルを下回っていた。「圧迫感・振動感を感じる音圧レベルとの比較結果」では、予測結果は全て「気にならない」の境界付近あるいはそれ以下となっていました。

また、「低周波音問題対応の手引書」（環境省、平成 16 年）に示された「低周波音問題対応のための「評価指針」」の「物的苦情に関する参考値」及び「心身に係る苦情に関する参考値」との比較を、後述の累積的影響を含めて示した図 10.1.4-9 に示す。

予測結果における本事業の寄与は全て「物的苦情に関する参考値」を下回り、「心身に係る苦情に関する参考値」については可聴域の 80Hz が若干参考値を超える場合が見られた。

と言って、2 つのグラフを示しています。

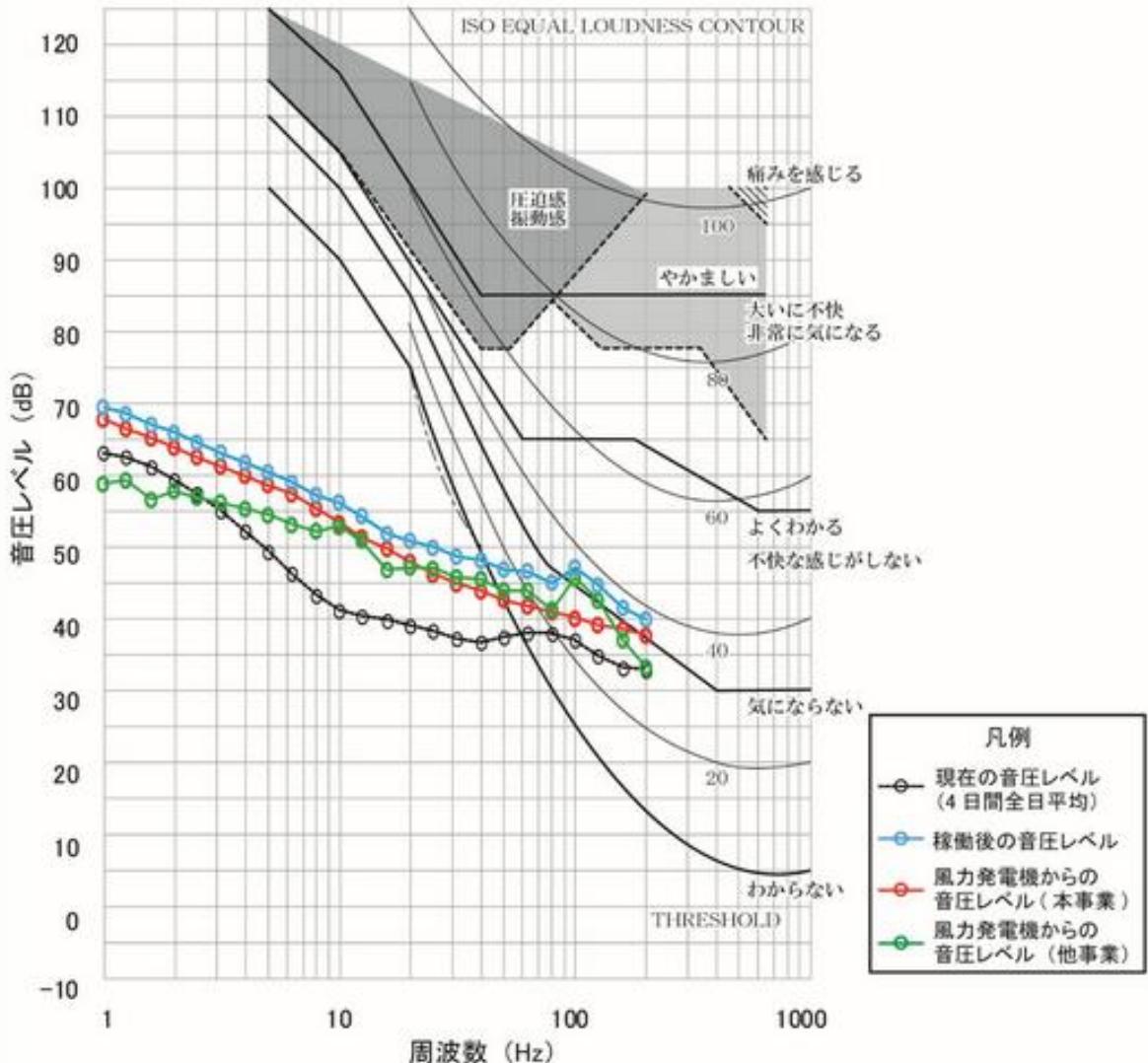


出典：「低周波音の測定方法に関するマニュアル」（環境庁大気保全局、平成 12 年）より作成

図 10.1.4-7(1) 建具のがたつきが始まるレベルとの比較結果

（環境一①：春季全日平均）

と



出典：「文部省科学研究費『環境科学』特別研究：超低周波音の生理・心理的影響と評価に関する研究班『昭和 55 年度報告書 1 低周波音に対する感覚と評価に関する基礎研究』」より作成

図 10.1.4-8(1) 圧迫感・振動感を感じる音圧レベルとの比較結果

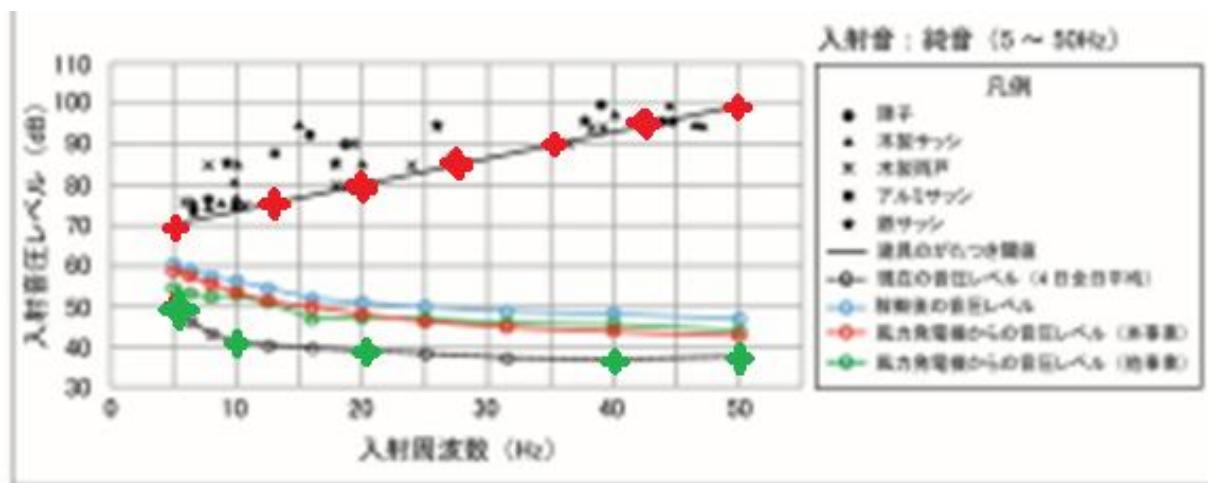
です。

GPI は次のように言う。風車からの音が 5 Hz 以上の周波数のものに限るならば、それなりに意味があるが、1 Hz、0.8 Hz、0.5 Hz 程度の音も出るのである。

1/3 オクターブバンド音圧レベル（平坦特性）についての「建具のがたつきが始まるレベルとの比較結果」を、後述の累積的影響を含めて示した図 10.1.4-7 に、「圧迫感・振動感を感じる音圧レベルとの比較結果」を図 10.1.4-8 に示す。

「建具のがたつきが始まるレベルとの比較結果」では、全ての予測値が建具のがたつきが始まるレベルを下回っていた。「圧迫感・振動感を感じる音圧レベルとの比較結果」では、予測結果は全て「気にならない」の境界付近あるいはそれ以下となっていた。

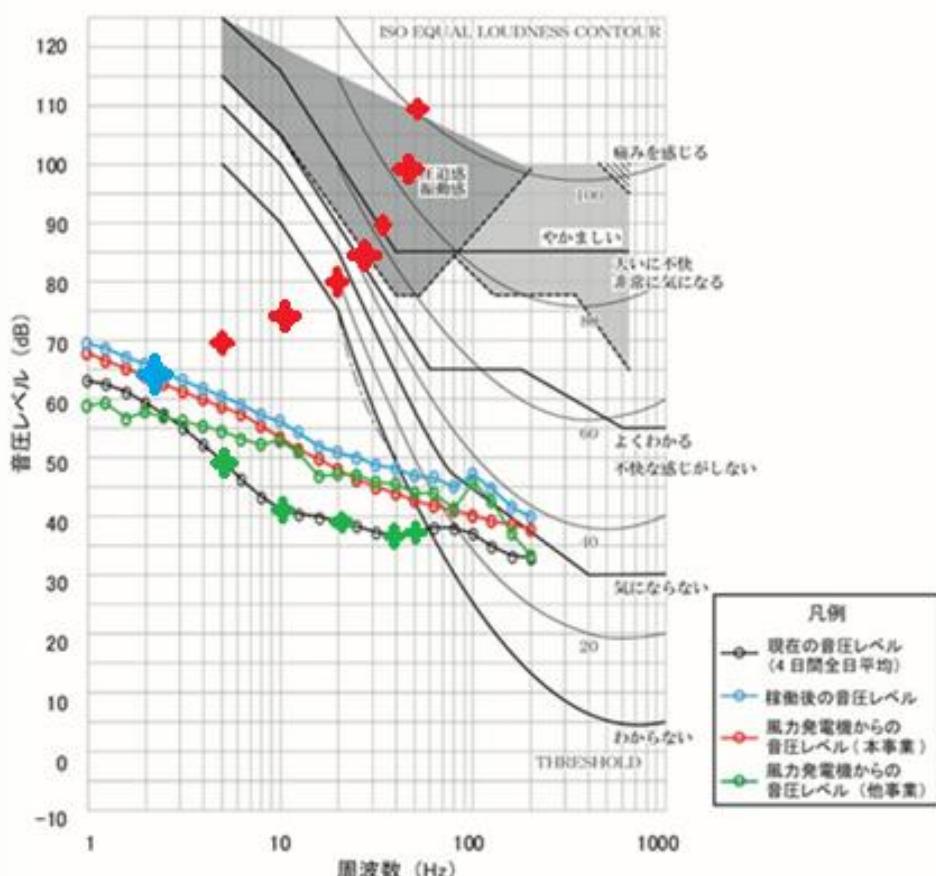
2つのグラフの対応する点に印をつけました。上のグラフの直線状の赤い点と、下の曲線状の緑の点です。



出典：「低周波音の測定方法に関するマニュアル」(環境庁大気係全局、平成12年)より作成

図 10.1.4-7(1) 建具のがたつきが始まるレベルとの比較結果

さて、上のグラフでは、5Hzまでしかなかった曲線が、下のグラフでは1Hzまで伸びています。でも、上の図の直線に当たるものが消えていますので、赤い印を追加しました。赤い印は、がたつき閾値の直線に対応します。



出典：「文部省科学研究費『環境科学』特別研究：超低周波音の生理・心理的影響と評価に関する研究班

『昭和55年度報告書1低周波音に対する感覚と評価に関する基礎研究』より作成

図 10.1.4-8(1) 圧迫感・振動感を感じる音圧レベルとの比較結果

物的苦情（ガタガタつき）に関する参考値は、平坦特性（重み付け無し）の数値で次の様になっています。

2.1 物的苦情に関する参考値

低周波音による物的苦情に関する参考値は、表1とする。

表1 低周波音による物的苦情に関する参考値

1/3オクターブバンド 中心周波数(Hz)	5	6.3	8	10	12.5	16	20	25	31.5	40	50
1/3オクターブバンド 音圧レベル(dB)	70	71	72	73	75	77	80	83	87	93	99

この表を見れば、周波数が低くなると、参考値(ガタツキ閾値と呼ぶことにします。)が小さくなることが分かります。

現在の音圧レベルを表す黒丸を連ねた線は、延長しても交差しない可能性がありますが、赤い丸を連ねた、本事業の音では、1Hzで69dB程度になっています。GPIの分だけでも、もちろん、建設後の全体の音圧レベルを見ても、2Hzあたりで延長線がぶつかると考えられます。

物的苦情に関する参考値が5Hzまでしかないが、GPIの事業では少なくとも1Hzで69dB程度の音が出ることを自ら認めています。周波数が5Hzよりも低くなったら、家具や床は、がたついたり揺れたりしないのでしょうか？

そんなことはありません。日本家屋の固有振動数は1Hzの近くにあることが分かっています。固有振動数の力が周期的作用すれば、物は大きく振動します。これを共振といいます。

このを考えれば、2Hzあたりでの、ガタツキが起こる可能性が極めて高いと思われます。もちろん、振動レベル計はすでに購入してありますので、建設後にはすぐに計測して結果を公開します。

“全ての予測値が建具のがたつきが始まるレベルを下回っていた。”との表現は、誤解を誘う表現です。

正確に言えば、

“5Hz以上の周波数成分については、建具のがたつきが始まるレベルを下回っているが、1Hz、2Hzあたりでは、がたつきが始まるレベルを超えていると考えられる。建設後には、振動レベル計での計測が必要です。”

と書くべきです。

建具がガタガタすれば、目が覚めます。風車は夜も止まってくれないので、毎日の睡眠不足で体力、気力が落ちます。授業中居眠りする子供の学力も落ちます。家や建具のがたつきは私たちの睡眠を妨げます。朝早くから車を運転する人にとっては、非常に大きな問題です。居眠り運転で事故を起こす可能性が高まります。聴覚での限界を下回っていても、家や家具がガタついたのでは眠れません。

物的苦情に関する参考値に関して、下回っていたとGPIは書いています。

(b) 「低周波音問題対応のための「評価指針」との比較

本事業の1/3オクターブバンド音圧レベル（平坦特性）の予測結果では、「低周波音問題対応のための「評価指針」」で示された「物的苦情に関する参考値」（「建具のがたつきが始まるレベル」と同じ）を下回っていた。また、「心身に係る苦情に関する参考値」との比較で

この結論は、検討を5Hzで打ち切ったと言う事を意味するだけです。

“比較できなかった”と言う日本語は、“下回っていた”と言う日本語とは違うのです。

実際の計測結果を見れば、さらに大きな問題が潜んでいることが分かります。

千葉県館山市にある風車の音を、ISO7196に従って、1/3オクターブ解析にかけて、各周波数帯の音圧レベルを平坦特性で示せば、次のようになります。下の段が中心周波数、上の段が音圧レベルです。

W15: transpose(w12)							
	1: No Units	2: No Units	3: No Units	4: No Units	5: No Units	6: No Units	7: No Units
1:	54.727250	62.381626	54.976763	56.733648	58.610999	77.287140	64.371465
2:	0.250000	0.315000	0.400000	0.500000	0.630000	0.800000	1.000000
3:							

さて、0.8Hzでは、77.287 dBです。

5Hzでのガタツキ閾値が70dBです。ガタツキ閾値は、周波数が下がるとガタツキ閾値も減ります。しかも、日本家屋の固有振動数は1Hzに近いのです。さらに、風速は大きく変動して、1時間に1回くらいは大きな音圧の音が出ます。

平坦特性(重み無し)で77dBとなる音圧(パスカル)を次の式で確認します。

音圧レベル<物理的な大きさ>

音響出力は音圧の
二乗に比例する

$$L_p = 10 \cdot \log_{10}(p^2 / p_0^2)$$

L_p : 音圧レベル(dB)

dB値(参考): 0.002Pa=40dB,

p : 音圧実効値(Pa)

0.00002(2×10^{-5})Pa=0dB

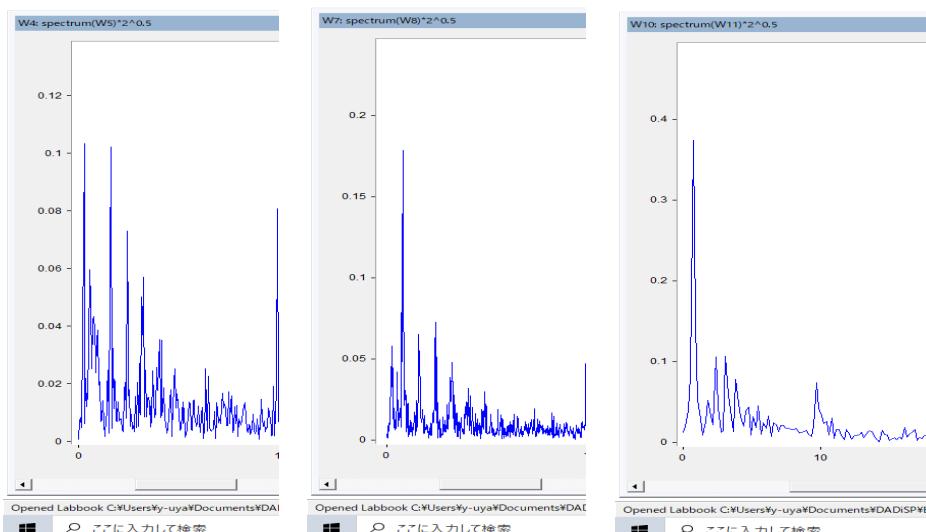
p_0 : 基準音圧 2×10^{-5} (Pa) (=20μPa)

* OA音圧レベル(dB), 1/3オクターブバンド音圧レベル(dB)

$77 = 20 * \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$ 、より、 $p=0.141$ (Pa)を得る。1時間に1回程度は強い風が吹く。その時は、音圧も上がり 0.37

(Pa) くらいになる。 $p=0.37$ (Pa) ならば、 $20 * \log\left(\frac{0.37}{p_0}\right) = 85.34$ (dB)、音圧レベルは、85.34 (dB) になる

のです。



0.104Pa

0.175Pa

0.37Pa

風速が強くなれば、音圧も変化します。1時間に1回、目覚まし時計が鳴るような状況になってはいけないです。

十分な睡眠がとれなくなることは、住民にとって、健康面のほかに、学力、交通事故、仕事への集中力、安全に仕事を継続するための体力の回復、に大きな問題をもたらすのです。

もちろん、推測だけではなく、室内での、精密騒音計と振動レベル計での計測結果を公表することによって、ガタツキ閾値を1Hz以下の周波数成分まで拡張できるようにすべきです。

いくら、ガタツキ閾値の表に数値が無いからと言っても、がたつきが起きないかのように誤解させる表現をしてはいけません。

GPIはなぜ準備書を作成するのかが全く分かっていません。準備書は、環境影響評価法で定められた手続きです。その提出と内容は、法律の目的に沿ったものでなくてはなりません。

環境影響評価法

(目的)

第一条 この法律は、土地の形状の変更、工作物の新設等の事業を行う事業者がその事業の実施に当たりあらかじめ環境影響評価を行うことが環境の保全上極めて重要であることにかんがみ、環境影響評価について国等の責務を明らかにするとともに、規模が大きく環境影響の程度が著しいものとなるおそれがある事業について環境影響評価が適切かつ円滑に行われるための手続その他所要の事項を定め、その手続等によって行われた環境影響評価の結果をその事業に係る環境の保全のための措置その他のその事業の内容に関する決定に反映させるための措置をとること等により、その事業に係る環境の保全について適正な配慮がなされることを確保し、もって現在及び将来の国民の健康で文化的な生活の確保に資することを目的とする。

特に、

“その事業に係る環境の保全について適正な配慮がなされることを確保し、もって現在及び将来の国民の健康で文化的な生活の確保に資することを目的とする。”

を実現するには、GPIが持っている、風況のデータを公開して、多くの専門家がインターネットを通じて検証できるようにしなくてはなりません。

理由は、ガタツキ閾値に関する研究データが古すぎて、現在の大型風車に合わないからです。共振に関する研究も進んでいます。GPIが計測したデータを基にして、最新の研究結果からがたつきに関する予測をする必要があるのです。

計測機材も進歩しています。最新の精密騒音計は超低周波音をしっかりと把握できます。振動レベル計は家の中の振動を把握できます。

解析技術の進歩もあります。FFTの他に、Waveletやカオス理論も使えます。これらの理論を使った解析ソフトもあります。特に有限要素法の進歩は目覚ましいものがあります。GPIが観測した風況のデータさえ公開すれば、有限要素法によって、正確な振動被害の予測ができるのです。

法律の目的に沿った準備書を作成するべきですが、その能力がないならば、データを公開すれば良いのです。また、ソフトや理論には間違いがあるかもしれません。多くの人がいろいろな立場から検証して、それらの結果を比較することが必要なのです。そのためには、実際の計測データを公開しなくてはなりません。

準備書の目的が、

“その事業に係る環境の保全について適正な配慮がなされることを確保し、もって現在及び将来の国民の健康で文化的な生活の確保に資することを目的とする。”

であることを理解できるのならば、最低でも、風況の計測値に基づいた被害予測をするべきなのです。

8.3.3 家屋の強制振動

- 外力を振動させた場合の運動方程式:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = a \cos \omega t$$

- a が外力の振幅を表す。

$$f = a \cos \omega t$$

- 一般解(実数固有値をもつ場合):

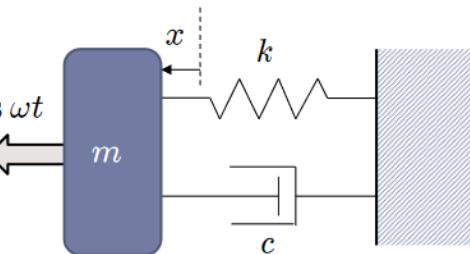
自由振動の一般解

$$x = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) + A \cos(\omega t - \phi) \rightarrow \text{定常振動解}$$

$$A = \frac{a}{\sqrt{(m\omega^2 - k)^2 + c^2\omega^2}}, \quad \phi = \arg(k - m\omega^2, c\omega)$$

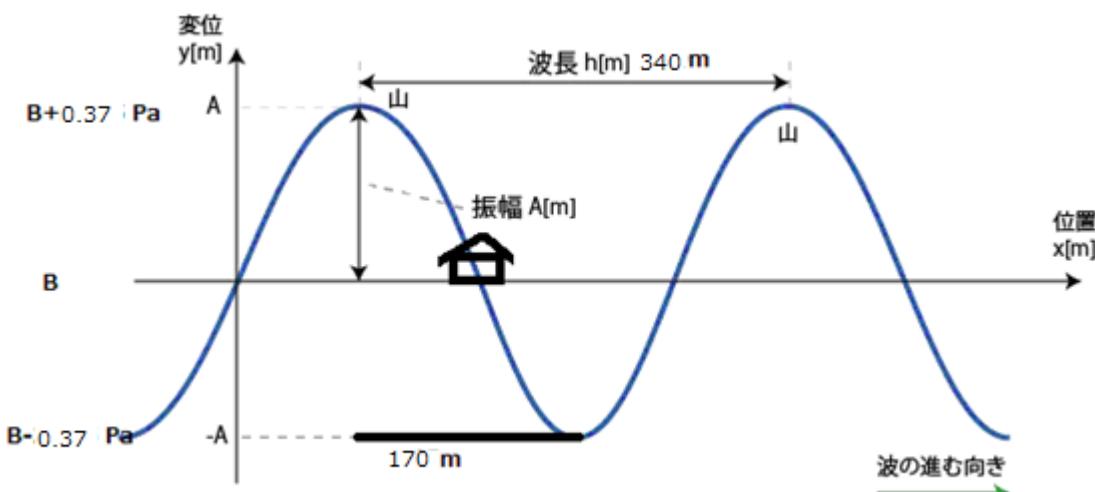
定常振動の振幅(Amplitude) 位相遅れ(Phase delay; Phase lag)

- 「自由振動の一般解」の部分の未定係数は外力項の影響を受ける。
- このように、一般解が自由振動解と定常振動解の「和」になるのは、"線形微分方程式"だからである。单振り子のように非線形の場合は、厳密には一般解が「和」にならない。



ここでは、音速が 340m/秒だとして考えることにする。

周波数が 1 (Hz) の音の場合、音圧を 0.37 (Pa) として、ある時刻 t を固定すれば



上の図のようになる。

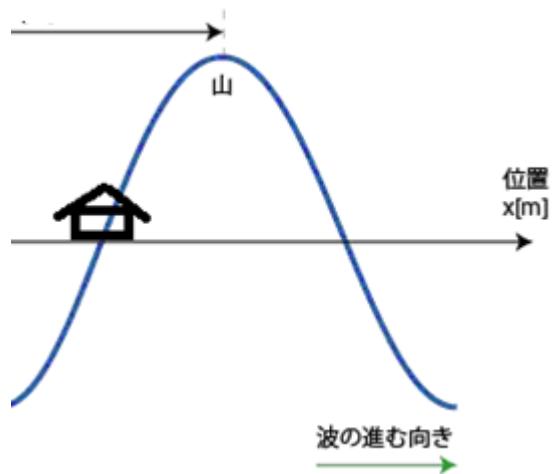
170m 離れると気圧差が、 0.37×2 (Pa) であり、家の巾が 10m とすれば、家の左側と右側での気圧差は、 $0.37 \times 2 \times (10/170) = 0.0435$ (Pa) となる。

さて、1Pa は、1 m²あたり 1N の圧力がかかるることを意味する。

左側から家を押す力と、右側から家を押す力の差は、圧力差に壁の面積掛けて得られる。

この圧力を受ける家の壁の面積を、 $20m \times 5m = 100 m^2$ とすれば、上の図での圧力差は、 $0.0435 \times 100 = 4.35$ (N) となる。左から右に、4.35 (N) の力で押される。

0.5秒後には、



の様になり、右から左に、4.35 (N) の力で押される。

$$F = 4.35 \cos(2\pi t)$$

の周期的な力が加わる。

最新 耐震構造解析 柴田 明徳 著 森北出版 を参考にして、共振について確認しておきます。
建物を下の図のように考えます。変位をy、質量をm、として、慣性力、減衰力、復元力、外力を考えれば、

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = f(t)$$

となる。

$$f(t) = F \cos(pt)$$

として、

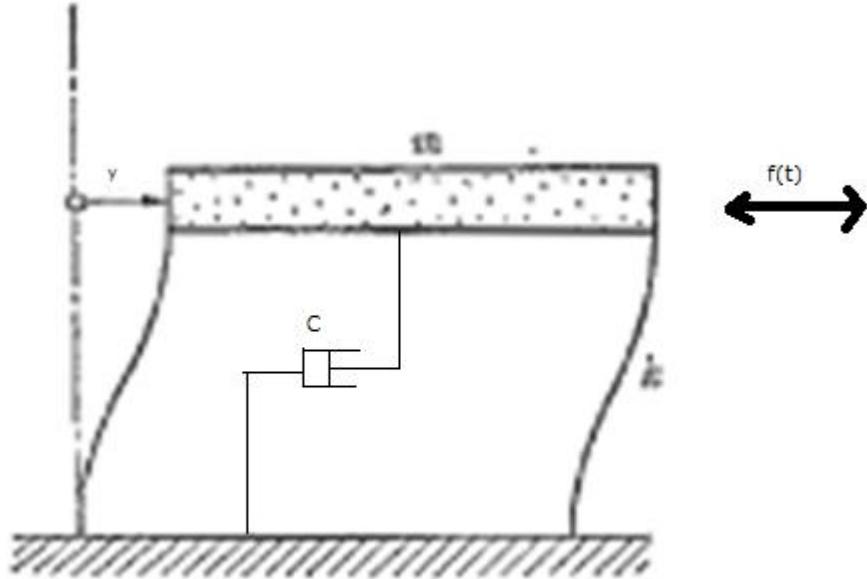


図 1・5 一層建物

微分方程式の解は、

$$y = A \cos(pt - \theta)$$

ただし、

$$A = \frac{1}{\sqrt{\{1 - (p/\omega)^2 + 4h^2(p/\omega)^2\}}} \delta_s$$

$$\delta_s = F/k$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2h(p/\omega)}{1 - (p/\omega)^2}$$

さらに、 $\varphi = (p/\omega)$ と置いて、 $dA/d\varphi = 0$ より、A の最大値は、

$$A_{max} = \frac{1}{2h\sqrt{1 - h^2}} \delta_s$$

となる。

最新 耐震構造解析p273には、

$m = 10^5 \text{ kg}$ 、 $k = 1.96 \times 10^8 \text{ N/m}$ 、 $h = 0.02$ 、 $k/m = \omega^2$ 、 $c/m = 2h\omega$
の数値も載っている。

(2) 調和地動の対する定常応答

1自由度系の基礎に地動 $y_0(t)$ が加わる場合の運動方程式は、基礎に対する相対変位を y とすれば、図 1.23 より次のように得られる。

$$\{-m(\ddot{y} + \ddot{y}_0)\} + (-c\dot{y}) + (-ky) = 0$$

よって、

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m\ddot{y}_0$$

ここで、 $\omega^2 = k/m$ 、 $2h\omega = c/m$ と置けば、

$$\ddot{y} + 2h\omega\dot{y} + \omega^2y = -\ddot{y}_0 \quad (1.76)$$

と書ける。式(1.75)より。地動を受ける場合は、地動慣性力 $(-m\ddot{y}_0)$ を見かけの外力を考えれば、(1)項の強制外力と全く同様に扱えることが分かる。

ここでは、複素形の調和地動

$$y_0 = a_0 e^{ipt} = a_0 (\cos(pt) + i * \sin(pt))$$

に対応する定常応答解を調べてみよう。実数型地動 $a_0 \cos(pt)$ あるいは、 $a_0 \sin(pt)$

に対する応答は、次の式の実部あるいは虚部をとればよい。

$$\ddot{y} + 2h\omega\dot{y} + \omega^2y = a_0 p^2 e^{ipt} \quad (1.78)$$

特解を $y = Ce^{ipt}$ と置いて、(1.78)に代入すれば、

$$-Cp^2 e^{ipt} + ip2h\omega C e^{ipt} + \omega^2 C e^{ipt} = a_0 p^2 e^{ipt}$$

となり、これが成立するには、

$$C = (a_0 p^2) / (-p^2 + ip2h\omega + \omega^2)$$

よって、特解は

$$\begin{aligned} y &= \{(a_0 p^2) / (-p^2 + ip2h\omega + \omega^2)\} e^{ipt} \\ &= \{(p/\omega)^2 / (1 - (\frac{p}{\omega})^2 + i2h(\frac{p}{\omega}))\} a_0 e^{ipt} \end{aligned}$$

ここで、

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{2h(\frac{p}{\omega})}{1 - (\frac{p}{\omega})^2} \right)$$

と置けば、構造物の相対変位倍率は次のように表される。

$$y/y_0 = \left(\frac{(\frac{p}{\omega})^2}{\sqrt{(1 - (\frac{p}{\omega})^2)^2 + 4h^2(p/\omega)^2}} \right) * e^{-i\theta} = \left| \frac{y}{y_0} \right| * e^{-i\theta}$$

また、構造物の絶対加速度倍率は次のようになる。

$$\begin{aligned} \ddot{Y} &= (\ddot{y} + \ddot{y}_0) = -2h\omega\dot{y} - \omega^2y = -(2h\omega pi + \omega^2)y \\ &= -(2h\omega pi + \omega^2) \{ (p/\omega)^2 / (1 - (\frac{p}{\omega})^2 + i2h(\frac{p}{\omega})) \} a_0 e^{ipt} \\ &= \left(2h \left(\frac{p}{\omega} \right) i + 1 \right) \left\{ \frac{1}{1 - (\frac{p}{\omega})^2 + i2h(\frac{p}{\omega})} \right\} (-a_0 p^2 e^{ipt}) \end{aligned}$$

係数の部分の分母の共役複素数を掛けてから計算すると、

$$\theta' = \tan^{-1}\left(\frac{2h\left(\frac{p}{\omega}\right)}{\{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\}^2 + 4h^2(p/\omega)^2}\right)$$

として、

$$\frac{\ddot{Y}}{\ddot{y}_0} = \left(\frac{1 + 4h^2\left(\frac{p}{\omega}\right)^2}{\sqrt{(1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2)^2 + 4h^2(p/\omega)^2}} \right) * e^{-i\theta'} = \left| \frac{\ddot{Y}}{\ddot{y}_0} \right| * e^{-i\theta'}$$

となる。この式から、 h の値が 0 に近くて、 p が ω に近いならば、 $\left| \frac{y}{y_0} \right|$ も $\left| \frac{\ddot{Y}}{\ddot{y}_0} \right|$ も非常に大きな値となる。

$p = \omega = 2\pi/T$, (T は周期、例えば 1 秒) ならば、 $\omega = 2\pi$

$$F = 3.6\cos(2\pi t)$$

$p = 2\pi$

なので、p273 より、 $h = 0.02$ として、

$$1.0016/2h = 25.04$$

(3) 調和地動に対する過渡応答

初期条件を考慮した強制振動応答過渡応答と呼ばれる。いま、図 1.26 のような、調和振動が静止している構造物に作用する場合の過渡応答を考える。

地動を

$$y_0 = a_0 \cos(pt)$$

とすれば、式(1.76)は

$$\ddot{y} + 2h\omega\dot{y} + \omega^2y = -\ddot{y}_0 = a_0 p^2 \cos(pt) \quad \cdots \quad (1.85)$$

となる。この解は、特解と自由振動解の和として書けて、

$$y = A \cos(pt - \theta) + e^{-h\omega t} (a \cos \omega' t + b \sin \omega' t)$$

ここで、

$$A = \left(\frac{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2}{\sqrt{(1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2)^2 + 4h^2(p/\omega)^2}} \right) a_0$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2h\left(\frac{p}{\omega}\right)}{\{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\}}\right)$$

$$\omega' = \sqrt{1 - h^2}\omega$$

である。

初期条件として、 $t=0$ で $y=0$, $\dot{y}=0$ をとれば、(1.86)式の a と b が定まり、過渡振動解は

$$y = A[\cos(pt - \theta) - e^{-h\omega t} \left(\cos\theta \cos\omega' t + \frac{h\cos\theta + (\frac{p}{\omega})\sin\theta}{\sqrt{1-h^2}} \sin\omega' t \right)] \quad (1.87)$$

となる。

共振($p = \omega$)の場合の過渡応答を考える。

このときは、 $\theta = \tan^{-1}(\infty) = \pi/2$ となるので、

$$y = \frac{a_0}{2h} [\sin(\omega t) + e^{-h\omega t} \left(\frac{1}{\sqrt{1-h^2}} \sin\omega' t \right)]$$

を得る。通常の構造物応答では、 $h \ll 1$ 、 $\omega' = \omega$ としてよいから、近似的に次の式を得る。

$$y = \frac{a_0}{2h} (1 - e^{-h\omega t}) \sin\omega t$$

また、非減衰の場合($h=0 \rightarrow \theta = 0$)を考えると、(1.87)式は

$$y = \frac{(p/\omega)^2}{1 - (p/\omega)^2} * a_0 * (\cos pt - \cos\omega t)$$

となり、さらに共振の条件 $p = \omega$ を

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

に配慮しながら適用すれば

$$\begin{aligned} y &= \lim_{p \rightarrow \omega} \frac{1}{1 + (\frac{p}{\omega})} * \frac{(p/\omega)^2}{1 - (p/\omega)} * a_0 * 2\sin\left(\frac{\omega+p}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega-p}{2}t\right) \\ &= \lim_{p \rightarrow \omega} \frac{(p/\omega)^2}{1 + (\frac{p}{\omega})} * \frac{\sin(\frac{\omega-p}{2}t)}{1 - (p/\omega)} * 2 * a_0 * \sin\left(\frac{\omega+p}{2}t\right) \\ &= \frac{1}{2} \omega t * a_0 * \sin(\omega t) \end{aligned}$$

となり、非減衰で共振の場合は、振幅が時間に比例して増大し、 $t = \infty$ で振幅も ∞ となる。

図 1.27 は共振応答の時間的变化を示したものである。(T=1.0s)

質量とは、物質の量を示すもので、密度と体積との相乗積として考えられた量のことです。

SI 単位は「kg」で表示します。

力は、質量と重力加速度との積で、SI 単位は「N」で表示します。

「重量」「重さ」「荷重」という用語も「力」の意味で用います。

力は、旧単位表示で、「kgf」で、あらわします。

質量 1kg の物体は、標準加速度 9.80665m/s の場合、1kgf の重量となります。

1kgf=9.80665N となります。

よって、9.8N の力は、質量 1 kg の物を持ち上げるときの力です。

$4800N/9.8N=489.8$ となり、左から押す力は、 $489.8+F \text{ kg}$ の物を持ち上げるくらいの力、右から押す力は $F \text{ kg}$ の物を持ち上げるくらいの力となり、差引、左から 500kg の物を持ち上げるくらいの力が掛かっていることになります。(乗用車の半分くらい)

上の図で、左端の家は右から押されます。左から 2 番目の家は左右が釣り合っています。右端の家は、右から押されます。

家は、右から押されたり、左右からの圧力が釣り合ったり、左から押されたりします。

周期的な外力が掛かるのです。

千葉県の館山市で 1 基だけ立っている場所での計測結果では、0.3 パスカルでしたので、この強さの力が一度だけ加わるならば、家が衝撃を受けて揺れるようなことは無いと思います。

しかしながら、館山での計測結果の Wavelet 解析による結果を見ると、

8.3.4 音響キャビテーション

環境影響評価の目的

“その事業に係る環境の保全について適正な配慮がなされることを確保し、もって現在及び将来の国民の健康で文化的な生活の確保に資することを目的とする。”

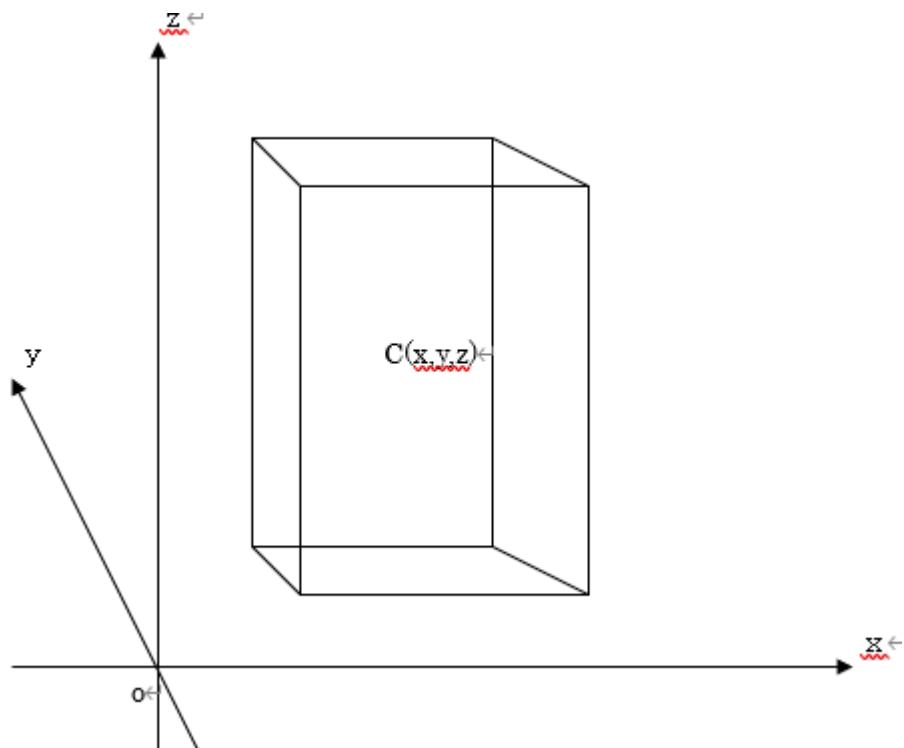
を考えるならば、風車音の影響に関する慎重な検討が必要です。

音によるより物理的な影響として、音響キャビテーションの可能性を検討する必要もあるのです。

キャビテーションにおける泡の発生と膨張

4. 1 Rayleigh-Plesset の式

これは、非圧縮性ニュートン流体中の単一球形気泡の膨張・収縮運動を記述する式である。以下その式を導く。



3次元空間に、(x,y,z)を中心とする直方体を考えて、各辺の幅をそれぞれ δx , δy , δz とする。

各面に対して座標の値の小さなほうから流入し、座標の値の大きな面から流出すると考える。 δt 秒間で考える。流入量と流出量の差は、微小体積内の質量の変化となる。

x 軸方向の流入と流出については、

流入は、 $\delta y * \delta z * \rho v(x - \delta x/2, y, z) * \delta t$, 流出は $-\delta y * \delta z * \rho v(x + \delta x/2, y, z) * \delta t$

y 軸、z 軸方向についても同様にして、

流入は、 $\delta z * \delta x * \rho v(x, y - \delta y/2, z) * \delta t$, 流出は $-\delta z * \delta x * \rho v(x, y + \delta y/2, z) * \delta t$

流入は、 $\delta x * \delta y * \rho v(x, y, z - \delta z/2) * \delta t$, 流出は $-\delta x * \delta y * \rho v(x, y, z + \delta z/2) * \delta t$

より、微小部分の質量の変化は

$$\begin{aligned}
 & (\rho(t+\delta t, x, y, z) - \rho(t, x, y, z)) * \delta x * \delta y * \delta z \\
 &= (\delta y * \delta z * (\rho v)(x - \delta x/2, y, z) - \delta y * \delta z * (\rho v)(x + \delta x/2, y, z) \\
 &\quad + \delta z * \delta x * (\rho v)(x, y - \delta y/2, z) - \delta z * \delta x * (\rho v)(x, y + \delta y/2, z) \\
 &\quad + \delta x * \delta y * (\rho v)(x, y, z - \delta z/2) - \delta x * \delta y * (\rho v)(x, y, z + \delta z/2)) * \delta t
 \end{aligned}$$

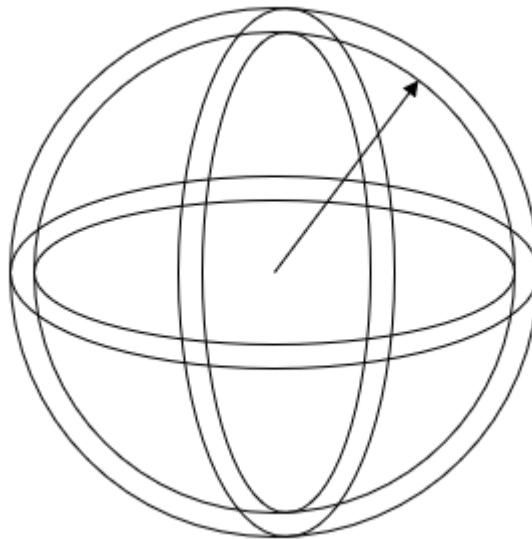
両辺を、 $\delta x * \delta y * \delta z * \delta t$ で割って極限値をとれば、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} \right)$$

流体の圧縮が無ければ、流入量と流出量は等しいので、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{よって、} \quad \operatorname{div} v = 0$$

となる。



球の中心から半径方向に向かっての流れを考える。半径 r と半径 $r + \delta r$ の間の薄い部分について考える。

δt 秒間での流入は、面積が $4\pi r^2 \delta r$ 、流速が $v(r, t)$ 、密度 ρ とすると、

$$4\pi r^2 \rho v^2 \delta t$$

流出は $-4\pi(r + \delta r)^2(r + \delta r)\rho v(t, r + \delta r)^2 \delta t$

薄い皮の部分の体積は、 $4\pi r^2 \delta r$ として、

$$\begin{aligned}
 & (\rho(t+\delta t, x, y, z) - \rho(t, x, y, z)) * 4\pi r^2 \delta r \\
 &= 4\pi r^2 \rho v^2 \delta t - 4\pi(r + \delta r)^2(r + \delta r)\rho v(t, r + \delta r)^2 \delta t
 \end{aligned}$$

両辺を $(4\pi r^* r^* \delta r^* \delta t)$ で割って極限値を考えると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_L)$$

流体が圧縮されないと考えると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_L) = 0$$

となる。気泡中心を原点とする球座標系を考える。すべての運動が球対称だとすれば運動を支配する物理量は気泡中心からの距離 r と時刻 t の関数となる。

非圧縮球対象流れに対する連続の式(2.5.8)と運動方程式(2.5.9)は、

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_L) = 0 \rightarrow r^2 u_L = \text{const.} \quad (2.5.8)$$

を得ることになる。

なお、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_L).$$

の右辺を微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r^2}{\partial r} \rho v_L + r^2 \frac{\partial (\rho v_L)}{\partial r} \right) \\ &= -\frac{2\rho v_L}{r} - \frac{\partial (\rho v_L)}{\partial r} \end{aligned}$$

を得る。

次は、運動方程式であるが、最初に連続物質の運動について考えます。

時刻 t において、点 $P(x,y,z)$ にある粒子が速度ベクトル

$$v(x,y,z,t) = (u(x,y,z,t), v(x,y,z,t), w(x,y,z,t))^t$$

を持つとする。

時刻 t において、点 $P(x,y,z)$ にあった粒子が移動して、時刻 $t + \Delta t$ での位置が

$$P'(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t)$$

になったとする。この点 P' にある粒子は速度

$$v(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t, t + \Delta t)$$

を持たなくてはならない。

したがって、時刻 t に点 $P(x,y,z)$ にある粒子は加速度

$$\begin{aligned} \alpha(x,y,z,t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (v(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t) - v(x, y, z, t)) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (u(x + u\Delta t, y + v\Delta t, z + w\Delta t, t + \Delta t) - u(x, y, z, t), v(\dots) - v(\dots), w(\dots) - w(\dots))^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (u(x+u\Delta t, y+v\Delta t, z+w\Delta t, t+\Delta t) - u(x, y+v\Delta t, z+w\Delta t, t+\Delta t) \\
&\quad + u(x, y+v\Delta t, z+w\Delta t, t+\Delta t) - u(x, y, z+w\Delta t, t+\Delta t) \\
&\quad + u(x, y, z+w\Delta t, t+\Delta t) - u(x, y, z, t+\Delta t) \\
&\quad + u(x, y, z, t+\Delta t) - u(x, y, z, t), \\
&\quad , v(\cdots) - v(\cdots),
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w + \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w + \frac{\partial w}{\partial t} \end{bmatrix}.$$

となります。

演算子

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\nu, \text{grad})$$

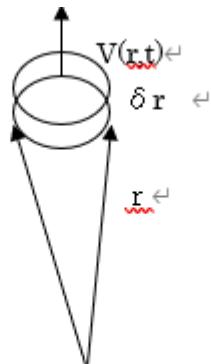
を Lagrange 的な微分演算子と言う。

この記号を使えば、

$$\alpha(x, y, z, t) = \frac{D}{Dt} \nu(x, y, z, t) = \frac{\partial \nu}{\partial t} + (\nu, \text{grad}) \nu$$

とかける。

粒子の移動が半径方向だけだとすれば、



時刻 t において、点 $P(r)$ にある粒子が速度ベクトル $\nu(r, t)$ を持つとする。

時刻 t において、点 $P(r)$ にあった粒子が移動して、時刻 $t + \Delta t$ での位置が $P'(r + v\Delta t)$ になったとする。この点 P' にある粒子は速度 $\nu(r + v\Delta t, t + \Delta t)$ を持たなくてはならない。

したがって、時刻 t に点 $P(x, y, z)$ にある粒子は加速度

$$\begin{aligned}
\alpha(r, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\nu(r + v\Delta t, t + \Delta t) - \nu(r, t)) \leftarrow \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (u(r + v\Delta t, t + \Delta t) - u(r, t + \Delta t) + u(r, t + \Delta t) - u(r, t)) \\
&= \left[\frac{\partial \nu}{\partial r} v + \frac{\partial \nu}{\partial t} \right] \leftarrow
\end{aligned}$$

となります。 演算子

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r}$$

が Lagrange 的な微分演算子となる。

この記号を使えば、 $\alpha(r, t) = \frac{D}{Dt} \nu(r, t)$ とかける。

$$F = m \alpha \quad \text{より} \quad \rho^* \Delta r * \Delta s * \left(\frac{\partial u_L}{\partial t} + u_L \frac{\partial u_L}{\partial r} \right) = -\Delta s * (p(r + \Delta r) - p(r))$$

となるので、

$$\frac{\partial u_L}{\partial t} + u_L \frac{\partial u_L}{\partial r} = -\frac{1}{\rho_L} \frac{\partial p_L}{\partial r} \quad (2.5.9)$$

(ただし、 ρ は密度、 $u = u(r, t)$ は半径方向流速を表す。 $p = p(r, t)$ は圧力を表す。添え字 L は液体を表す。)を得る。

気液界面の位置を $r = R(t)$ とする。この位置における流速は

$$u_L(R, t) = \frac{dR}{dt} \quad (2.5.10)$$

となる。

さらに、半径方向応力（圧力、粘性応力）および表面張力との釣り合いから、

$$-p_{LW} + 2\eta_L \frac{\partial u_L}{\partial r} \Big|_w - \frac{2\sigma}{R} = -p_{GW} + 2\eta_G \frac{\partial u_G}{\partial r} \Big|_w \quad (2.5.11)$$

が成り立つ。ただし、 η は粘性率を、 σ は気液間の表面張力を表し、添え字 W は気泡表面を、添え字 G は気体を表す。

式(2.5.8)、式(2.5.10)を合わせると、 $u_L(R, t)/R^2 = \frac{dR}{dt} \frac{1}{R^2} = \frac{u_L}{r^2}$ より、

任意の位置 r における流速は、

$$u_L = \frac{R^2}{r^2} \frac{dR}{dt} \quad (2.5.12)$$

式、(2.5.12)を運動方程式(2.5.9)に代入すると、

$$\frac{1}{r^2} \left[R^2 \frac{d^2 R}{dt^2} + 2R \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] - \frac{2}{r^5} \left[R^4 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] = -\frac{1}{\rho_L} \frac{\partial p_L}{\partial r} \quad (2.5.13)$$

式(2.5.13)を $r=R$ から ∞ まで積分すると、式(2.5.14)が得られる。

$$\left[R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{\rho_L} (p_{LW} - p_{L\infty}) \quad (2.5.14)$$

ただし、無限遠 $r=\infty$ での液体圧力を $p_{L\infty}$ とする。

式(2.5.12)を式(2.5.11)に代入して、 $\frac{\partial u}{\partial t} = -2 \frac{R^2}{r^3} \frac{dR}{dt}$ で $r=R$ とすれば、

$$-p_{LW} + 2\eta_L (-2 \frac{1}{R} \frac{dR}{dt}) - \frac{2\sigma}{R} = -p_{GW} + 2\eta_G (-2 \frac{1}{R} \frac{dR}{dt}) \quad \text{となり、空気の粘性を } 0 \text{ と考えると、}$$

$$p_{LW} = -4\eta_L \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{2\sigma}{R} + p_{GW} \quad (2.5.15)$$

となる。(2.5.14) (2.5.15) から

$$\left[R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{\rho_L} (-4\eta_L \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{2\sigma}{R} + p_{GW} - p_{L\infty}) \quad (2.5.16)$$

この式が、Rayleigh-Plesset の式である。

4. 2 キャビテーション気泡の成長

一般にキャビテーションとは、液体の圧力低下とともに、その中の多数の微小な空気泡の核から気泡が発生する現象と考えられている。

その後の気泡の膨張や収縮の過程では、泡の内部や泡の境界での相変化や熱・気体の拡散が起こる。

したがって、キャビテーションは熱・物質移動を伴う泡の膨張、収縮の過程といえる。

最初に、微小な空気泡からキャビテーションが発生するための条件について平衡理論を用いて考察する。

半径 R_0 の泡が周囲の液体と平衡を保って安全に存在しているとすれば、

$$p'_{g0} + p'_{v0} = p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} \quad \text{が成立する。}$$

(p'_{g0} は泡の中のガスの圧力、 p'_{v0} は泡の中の蒸気の圧力、 p_0 は泡の周囲の液体圧力、 σ は液体の表面張力)

平衡状態の気泡については、平衡状態での不凝縮ガス圧、蒸気圧を p_{g0}, p_{v0} とする。

気体全体の境界面での圧力 p_{GW0} は、 $p_{GW0} = p_{g0} + p_{v0}$ となる。

平衡状態での気泡半径を R_0 、液体圧力を p_{L0} とすれば、 $p_{L0} = -\frac{2\sigma}{R} + p_{g0} + p_{v0}$ を得る。

平衡状態での蒸気圧は、そのときの温度 T_0 での飽和蒸気圧 $p_{SV}(T_0)$ となるので、

$$p_{g0} = \frac{2\sigma}{R} + p_{L0} - p_{SV}(T_0) \quad (2.5.21)$$

となる。

たとえば、1気圧 (101.3kPa)、20°C (293.15K)、半径 10 μm、20°Cで $\sigma = 72.75(\text{mN/m})$ 、飽和水蒸気圧は Tetens(1930)の式 $E(t)=6.11\times10^{(7.5t/(t+237.3))}$ で、温度 t °Cにおける飽和水蒸気圧 $E(t)$ hPa を求める。20°Cでは、23.39*100 (Pa) となる。

$$p_{g0} = 101.3 \times 10^3 - 23.39 \times 10^2 + \frac{2 \times 72.75 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-6}} = 113.5 \times 10^3 (\text{Pa})$$

不凝縮ガス圧は大気圧より大きくなり、ガスが液体中に徐々に溶け込んで気泡は消えてしまう。

ここで、液体の圧力が p_0 から P ($P > 0$) だけゆっくり減少して、泡が新しい平衡状態になったとすると、液

体の圧力が $(p_0 - P)$ になり、半径が R になったとして、泡の体積と泡の内部のガスの圧力は反比例する。平衡状態から準静的に液体圧力を下げてゆくとき、温度変化はなく、気泡内不凝縮ガスの量は一定とする。体積は半径の3乗に比例するので、このとき、気泡内不凝縮ガス圧力は等温変化 ($pV = \text{constant}$ (=nRT))

$$p'_g \frac{4\pi R^3}{3} = p'_{g0} \frac{4\pi R_0^3}{3} \text{ より、 } p_g = p'_{g0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3$$

となるので、

$$p'_{g0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 + p_v' = -P + p_0 + \frac{2\sigma}{R} \quad (\text{R は新しい平衡状態での泡の半径。})$$

となる。飽和水蒸気圧は Tetens(1930)の式 $E(t)=6.11 \times 10^{(7.5t/(t+237.3))}$ で決まり、等温変化ならば、気泡内蒸気圧 p_v は平衡状態 p_{v0} を保つ。

この式に R^3 をかけて、

$$-p'_{g0} R_0^3 = (P + p_v' - p_0) R^3 - 2\sigma R^2$$

R を t の関数と見て両辺を微分すれば、

$$0 = 3(P + p_v' - p_0)R^2 \frac{dR}{dt} - 4\sigma R^1 \frac{dR}{dt}$$

となり、

$$\frac{dR}{dt} = (3(P + p_v' - p_0)R^2 - 4\sigma R)^{-1}$$

$$\text{これより、 } 0 = 3(P + p_v' - p_0)R^2 - 4\sigma R^1 \quad \text{すなわち、 } R=0, \quad R = \frac{4\sigma}{3(P + p_v' - p_0)}$$

となるときは、半径が急激に増大することになる。これが臨界半径 R_c である。

このときの、液体圧 $p_c = -P + p_0$ は

$$p_c = -P + p_0 = p_v' - \frac{4\sigma}{3\sqrt{3}R_0} \left\{ 1 + (p_0 - p_v') \frac{R_0}{2\sigma} \right\}^{-1/2} \quad (38)$$

この式は、圧力 p_0 の液体中にある半径 R_0 の泡は液体の圧力が $p_c = -P + p_0$ 以下になると際限なく膨張することを意味している。

20°Cの水では、 $p_c = -1.013 \times 10^2 \text{ Pa}$ のときの臨界半径は $R_c = 9.1 \times 10^{-4} \text{ mm}$ である。

表 4.1: 水と空気の粘性係数 μ と動粘性係数 ν の値 (標準気圧)

温度 [°C]	0	10	20	30	40	
水	$\mu [\text{Pa} \cdot \text{s}]$	1.792×10^{-3}	1.309×10^{-3}	1.008×10^{-3}	0.800×10^{-3}	0.653×10^{-3}
	$\nu [\text{m}^2/\text{s}]$	1.794×10^{-6}	1.310×10^{-6}	1.010×10^{-6}	0.804×10^{-6}	0.659×10^{-6}
空気	$\mu [\text{Pa} \cdot \text{s}]$	17.23×10^{-6}	17.72×10^{-6}	18.21×10^{-6}	18.68×10^{-6}	19.14×10^{-6}
	$\nu [\text{m}^2/\text{s}]$	13.33×10^{-6}	14.21×10^{-6}	15.12×10^{-6}	16.04×10^{-6}	16.98×10^{-6}

Blake の閾圧値

Rayleigh-Plesset の式で、膨張速度(dR/dt)が十分小さいときは、

$$\left[R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{\rho_L} (-4\eta_L \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{2\sigma}{R} + p_{GW} - p_{L^\infty}) \quad (2.5.16)$$

の左辺を 0 とかんがえ、ゆっくりした変化なので粘性については $\eta = 0$ として、 $p_{GW} = p_g + p_v$ 、

$$p_g = p'_{g0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \text{ に注意して}$$

$$p_{L^\infty} = -\frac{2\sigma}{R} + p_{g0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 + p_{v0} \quad (2.5.24)$$

を得る。

この(2.5.24)式に従って、それぞれの圧力に対する平衡半径が定まる。ただし、平衡半径が定まるのは、圧力低下に対して、単調に気泡半径が増大する範囲

$$\frac{dp_{L^\infty}}{dR} = -\frac{3p_{g0}}{R} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 + \frac{2\sigma}{R^2} \leq 0$$

に限られる。

$\frac{dp_{L^\infty}}{dR} = 0$ を満たす液体圧力(2.5.26)を Blake の閾圧力という。

$$-\frac{3p_{g0}}{R} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 + \frac{2\sigma}{R^2} = 0 \text{ より} \quad -\frac{3p_{g0}R_0^3}{2\sigma} + \frac{R^2}{1} = 0 \text{ よって} \quad R = R_0 \sqrt{\frac{3p_{g0}R_0}{2\sigma}}$$

この値を、(2.5.24)に代入すると

$$p_{L^\infty} = -\frac{2\sigma}{R} + p_{g0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 + p_{v0} = -\frac{2\sigma}{R} + \frac{2\sigma}{3R} + p_{v0} = -\frac{6\sigma}{3R} + \frac{2\sigma}{3R} + p_{v0}$$

$$= p_{v0} - \frac{4\sigma}{3R}$$

このときの、水圧を p_{Blake} 、半径を R_{crit} とかけば、

$$R_{crit} = R_0 \sqrt{\frac{3p_{g0}R_0}{2\sigma}} \quad , \quad p_{Blake} = p_{v0} - \frac{4\sigma}{3R_{crit}}$$

となる。

これが、Blake の閾圧値であり、この値を超えると $\frac{dp_{L^\infty}}{dR} = 0$ より圧力が少しだけ変化すると半径が急激に変化することになる。

この場合は、1気圧 (101.3 kPa)、20°C (293.15K)、平衡半径 1.0 μm の場合は、

$$R_{crit} = R_0 \sqrt{\frac{3p_{g0}R_0^3}{2\sigma}} = 10^{-5} \sqrt{\frac{3*113.5*10^3*10^{-5}}{2*72.8*10^{-5}}} = 48.4\mu m,$$

$$p_{v0} - p_{Blake} = \frac{472.8*10^{-3}}{3*48.4*10^{-6}} = 200kPa$$

初期気泡半径が大きなほど、初期圧力 p_{L0} が低くなるほど、閾圧力と飽和蒸気圧 p_{v0} の差が小さくなる。したがって、このときは液体圧力が飽和蒸気圧に達したと同時に気泡成長が始まる。

10. キャビテーション気泡の成長過程

$p_{GW} = p_g + p_v$ を使って (2.5.16) を書き換えると、

$$\left[R \frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{\rho_L} ((p_{v0} - p_{L\infty}) + (p_{vw} - p_{v0}) + p_{gw} - 4\eta_L \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{2\sigma}{R}) \quad (2.5.30)$$

となる。

不凝縮性ガスは、新たな析出がなく、気泡内の温度 T_G は気泡表面の液体温度 T_{LW} と等しいとし、蒸気圧は飽和蒸気圧だとすれば、

$$p_{vw} = p_{sv}(T_G) \quad (2.5.31)$$

が成立する。また、 $pV=nRT$ より平衡状態で $p_{g0}V_0 = p_{g0} \frac{4\pi R_0^3}{3} = nRT_0$ 、

新しい状態で $p_{gw}V_G = p_{gw} \frac{4\pi R^3}{3} = nRT_G$ となるので、

$$p_{gw} = p_{g0} \frac{T_G}{T_0} \frac{R_0^3}{R^3} \quad (2.5.32)$$

が成立する。

10-1 等温過程

飽和水蒸気圧は Tetens(1930)の式 $E(t)=6.11\times10^{(7.5t/(t+237.3))}$ で決まるので、変化が等温変化なら蒸気圧が変化しないので、(2.5.30)は

$$\left[R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{\rho_L} ((p_{v0} - p_{L\infty}) + p_{g0} \frac{R_0^3}{R^3} - 4\eta_L \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{2\sigma}{R}) \quad (2.5.33)$$

となる。

$$\text{ここで、 } \eta = 0 \text{ を仮定し、} \left[R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{\rho_L} ((p_{v0} - p_{L\infty}) + p_{g0} \frac{R_0^3}{R^3} - \frac{2\sigma}{R})$$

時刻 $t = 0$ において液体圧力をステップ変化させ、 $t > 0$ のとき、 $p_{L\infty} = p_{L\infty}^*$ とした場合には解析解があり、

$$\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{2}{3} \frac{p_{v0} - p_{L\infty}^*}{\rho_L} \left(1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \right) + \frac{2p_{g0}}{\rho_L} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \ln \frac{R_0}{R} - \frac{2\sigma}{\rho_L R} \left[1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \right] \quad (2.5.34)$$

となる。実際に、上の式を微分して整理すると

$$R \frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{p_{v0} - p_{L\infty}^*}{\rho_L} \left(\left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \right) - \frac{P_{g0}}{\rho_L} 3 \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \ln \frac{R_0}{R} + \frac{P_{g0}}{\rho_L} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 + \frac{\sigma}{\rho_L R} \left[1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \right] - \frac{\sigma}{\rho_L R} \left[2 \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \right]$$

となり、これに、 $\frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2$ を加えると、(2.5.33)式になる。

式(2.5.34)は $R \gg R_0$ の場合、不凝縮ガス圧力が減少し、表面張力は一定で R が大きくなるので σ/R が小さくなるため

$$\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \rightarrow \frac{2}{3} \frac{p_{v0} - p_{L\infty}^*}{\rho_L}$$

となる。

10・2 蒸発潜熱の影響（熱輸送支配の解）

蒸発に伴う気泡表面液体温度 $T_{LW} (= T_G)$ の変化を考える。蒸発に必要なエネルギーを得るために、気泡表面温度は平衡温度 T_0 に比べて低下する。

このとき、飽和蒸気圧 $p_{sv}(T_{LW})$ も低下するため、(2.5.30)の右辺第2項が0でなくなる。

液体中の温度分布は、熱輸送方程式

$$\rho_L c_L \left(\frac{\partial T_L}{\partial t} + u_L \frac{\partial T_L}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda_L \frac{\partial T_L}{\partial r} \right) \quad (2.5.36)$$

にしたがう。ただし、 c_L, λ_L は液体の比熱、熱伝導率を表し、流速 u_L は

$$\text{式(2.5.12)} \quad u_L = \frac{R^2}{r^2} \frac{dR}{dt} \quad \text{に等しい。}$$

気泡表面の熱流束はすべて蒸発に使われるとすると、

$$\rho_{vw} 4\pi R^2 \frac{dR}{dt} L_v(T_{LW}) = 4\pi R^2 \lambda_L \frac{\partial T_L}{\partial r} |_w \quad (2.5.37)$$

ただし、 L_v は蒸発潜熱を表す。

気泡内蒸気密度は、理想気体の状態方程式(2.5.38)から

$$\rho_{vw} = \frac{P_{sv}(T_{kw})}{R_v T_{LW}} \quad (2.5.38)$$

式、(2.5.36)は λ_L が一定ならば、以下のように書き直せる。

$$\begin{aligned} \rho_L c_L \left(\frac{\partial T_L}{\partial t} + u_L \frac{\partial T_L}{\partial r} \right) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda_L \frac{\partial T_L}{\partial r} \right) \text{に、 } u_L = \frac{R^2}{r^2} \frac{dR}{dt} \text{ を代入して} \\ \rho_L c_L \left(\frac{\partial T_L}{\partial t} + \frac{R^2}{r^2} \frac{dR}{dt} \frac{\partial T_L}{\partial r} \right) &= \frac{1}{r^2} \left(2r \lambda_L \frac{\partial T_L}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 T_L}{\partial r^2} \right) \\ \left(\frac{\partial T_L}{\partial t} + \frac{R^2}{r^2} \frac{dR}{dt} \frac{\partial T_L}{\partial r} \right) &= \frac{\lambda_L}{\rho_L c_L} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial T_L}{\partial r} + \frac{\partial^2 T_L}{\partial r^2} \right) \end{aligned} \quad (2.5.39)$$

となる。ここで $D_r = \frac{\lambda_L}{\rho_L c_L}$ は温度伝導率を表す。

この式(2.5.39)で次の変換を行う。

$$T_L(r, t) = f(s), \quad s = \frac{r}{\sqrt{D_r t}}, \quad K = \frac{R(t)}{\sqrt{D_r t}} \quad (2.5.40)$$

$$\frac{\partial T_L}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right) f'(s) = -\frac{s}{2t} f'(s)$$

$$\frac{\partial T_L}{\partial r} = \left(\frac{\partial s}{\partial r} \right) f'(s) = -\frac{1}{\sqrt{D_r t}} f'(s)$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{K}{2} \sqrt{\frac{D_T}{t}}$$

などを用いて、常微分方程式

$$f''(s) + \left(\frac{2}{s} + \frac{s}{2} - \frac{K^3}{2s^2} \right) f'(s) = 0 \quad (2.5.41)$$

が得られる。

$Y=f'(s)$ として

$$\frac{dy}{y} = -\left(\frac{2}{s} + \frac{s}{2} - \frac{K^3}{2s^2} \right) ds$$

$$\log y = -(2 \log s + \frac{1}{4}s^2 + \frac{K^3}{2} \frac{1}{s})$$

$$y = \exp(-(2 \log s + \frac{1}{4}s^2 + \frac{K^3}{2} \frac{1}{s})) = \exp(-\log s^2) \times \exp(-\frac{s^2}{4} - \frac{K^3}{2s})$$

$$= s^{-2} \exp(-\frac{s^2}{4} - \frac{K^3}{2s})$$

$$f(\infty) - f(s) = A \int_s^\infty x^{-2} \exp\left(-\frac{x^2}{4} - \frac{K^3}{2x}\right) dx \quad (2.5.42)$$

$$\text{となる。ここで、 } F(s) = A \int_s^\infty x^{-2} \exp\left(-\frac{x^2}{4} - \frac{K^3}{2x}\right) dx \quad \text{とおけば、}$$

境界条件 $f(\infty) = T_L(\infty, t) = T_0$ 、 $f(K) = T_L(R, t) = T_{LW}$ を使って

$$f(s) = T_0 - (T_0 - T_{LW}) \frac{F(s)}{F(K)} \quad (2.5.43)$$

を得る。

$$\text{式(2.5.37) } \rho_{vw} 4\pi R^2 \frac{dR}{dt} L_v(T_{LW}) = 4\pi R^2 \lambda_L \frac{\partial T_L}{\partial r} |_w \quad \text{からは、}$$

$$T_L(r, t) = f(s), \quad s = \frac{r}{\sqrt{D_r t}}, \quad K = \frac{R(t)}{\sqrt{D_r t}}, \quad D_r = \frac{\lambda_L}{\rho_L c_L} \quad \text{、境界面では } r=R(t) \text{ なので、}$$

$$\rho_{vw} \frac{1}{2} K \sqrt{\frac{D_r}{t}} L_v(T_{LW}) = \lambda_L f'(K) \frac{1}{\sqrt{D_r t}} \quad \text{より}$$

$$f'(K) = \rho_{vw} \frac{1}{2\lambda_L} K D_r L_v(T_{LW}) = \frac{K \rho_{vw}}{2} \frac{1}{\rho_L c_L} L_v(T_{LW}) \quad (2.5.44)$$

を得る。

$$f'(K) = -(T_0 - T_{LW}) \frac{F'(K)}{F(K)} = \frac{K \rho_{vw}}{2} \frac{1}{\rho_L c_L} L_v(T_{LW})$$

$$\frac{2\rho_L c_L}{\rho_{VW} L_V(T_{LW})} \frac{(T_0 - T_{LW})}{K} = -\frac{F(K)}{F'(K)} = g(K) \quad (2.5.45)$$

となる。この $g(K)$ を数値積分でもとめたものを近似する式は

$$g(K) = \left(\frac{\pi}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{K}{K + 0.9253} \quad (2.5.46)$$

であることを島・辻野氏が求めた。

また、(2.5.45)

$$\frac{2\rho_L c_L}{\rho_{VW} L_V(T_{LW})} \frac{(T_0 - T_{LW})}{K} = -\frac{F(K)}{F'(K)} = g(K) = \left(\frac{\pi}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{K}{K + 0.9253}$$

で、 $\frac{dR}{dt} = \frac{K}{2} \sqrt{\frac{D_T}{t}}$ 、 $K = \frac{R(t)}{\sqrt{D_r t}}$ をそれぞれ左辺、右辺に代入して、

$$\frac{2\rho_L c_L}{\rho_{VW} L_V(T_{LW})} \frac{(T_0 - T_{LW})}{1} \left(\frac{12}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{0.9253}{R(t)} \sqrt{D_T t}\right) = 2 \frac{dR}{dt} \sqrt{\frac{t}{D_T}}$$

よって、

$$D_T \frac{2\rho_L c_L}{\rho_{VW} L_V(T_{LW})} \frac{(T_0 - T_{LW})}{1} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R(t)}{\sqrt{D_T t}} + \frac{0.9253}{1}\right) = R(t) \frac{dR}{dt} \quad (2.5.47)$$

となる。

10-3 慣性力支配の解と熱輸送支配の解の関係

エントロピーの変化 $s'' - s'$ は液体が蒸発することによって生ずるものであり、蒸発潜熱 q と関係づけられるとし、エンタルピの変化 $h'' - h'$ とも関係づけられ、

$$\begin{aligned} q &= h'' - h' = T(s'' - s') \\ &= (v'' - v') T dP / dT \\ &= (v'' - v') dP / d(\ln T) \cdots (6) \end{aligned}$$

となる。この式を Clausius-Clapeiron 式という。

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1} = \frac{q}{T(v_2 - v_1)}, \quad q = T(s_2 - s_1)$$

で与えられる。ここで $q = T(s_2 - s_1)$ は、1 mol 当たりの潜熱である。

今、相1を水蒸気、相2を水とする。 $v_1 \gg v_2$ であるから v_2 を無視し、理想気体の状態方程式 $pV = RT$ を用いると、

$$\frac{dp}{p} = \frac{q}{RT^2} dT$$

両辺を積分して、

$$\log \frac{p}{p_0} = -\frac{q}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)$$

$$\therefore p = p_0 \exp \left[-\frac{q}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right]$$

$q = 43.99 \text{ k J/mol}$, $R = 8.31 \text{ J/mol/K}$, $p_0 = 611 \text{ Pa}$, $T_0 = 273.16 \text{ K}$ を用いると、 $t \text{ }^\circ\text{C}$ における飽和水蒸気圧 e は、

$$e = 6.11 \times \exp \left(19.4 \times \frac{t}{t + 273.15} \right) [\text{hPa}]$$

これは、平らな水面に対する飽和蒸気圧である。

Tetens(1930)の式 $E(t) = 6.11 \times 10^{(7.5t/(t+237.3))}$ これと合わない。?????????

式、(2.5.30)

$$\left[R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{\rho_L} ((p_{v0} - p_{L\infty}) + (p_{vw} - p_{v0}) + p_{gw} - 4\eta_L \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{2\sigma}{R})$$

(2.5.30)

における蒸気圧の差、 $(p_{vw} - p_{v0})$ は Clausius-Clapeyron の式

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_2 - s_1}{v_2 - v_1} = \frac{q}{T(v_2 - v_1)}, \quad q = T(s_2 - s_1)$$

を用いて

$$(p_{vw} - p_{v0}) = p_{sv}(T_{LW}) - p_{sv}(T_0) = \frac{dp_{sv}}{dT} \Big|_{T=T_0} (T_{LW} - T_0)$$

$$= \frac{\rho_{v0} L_{v0}}{T_0} (T_{LW} - T_0)$$

(2.5.48)

を得る。ただし、 $\rho_{v0} = p_{sv}(T_0)/R_v T_0$ 、 $L_{v0} = L_v(T_0)$ とした。

L_v は蒸発潜熱を表す。

気泡内蒸気密度は、理想気体の状態方程式 $pv = nRT$ (2.5.38)から
 $p/(RT) = n/v$ この n/v は数密度となり、

$$\rho_{vw} = \frac{p_{sv}(T_{kw})}{R_v T_{lw}} \quad (2.5.38)$$

を得る。

ここで、理想気体の圧力は分子の総数 N に比例するが、分子の質量には依存しない。そこで、

$$\rho = \frac{\text{数}}{\text{体積}} = \frac{N}{V} \quad \text{で定義される 数密度 を用いると便利である。}$$

$$0^{\circ}\text{C}, 1 \text{ 気圧で理想気体の数密度(理論値)は, } \rho = \frac{1[\text{mol}]}{0.022414[\text{m}^3]} = 44.615[\text{mol}/\text{m}^3]$$

$$\text{一方, 日常的に, 単に密度というときは 質量密度 } \rho = \frac{\text{質量}}{\text{体積}}$$

を指すが、分子量 M [g/mol] の分子 N [mol] 分の総質量は NM [g]だから、 ρ と n は

$$\rho = \frac{MN}{V} = Mn \quad (\text{M: 分子量})$$

と関係づけられる。物質の総量を表すのに、実験的には重量[g]を単位にする方が便利だが、理論的にはモル単位で考える方がよいことが多い。

式(2.5.48)に式(2.5.45)を代入すると、

$$(p_{vw} - p_{v0}) = \frac{\rho_{v0} L_{v0}}{T_0} (T_{lw} - T_0) = \frac{\rho_{v0} L_{v0}}{T_0} (-g(K) \frac{K \rho_{v0} L_{v0}}{\rho_L c_L}) = -g(K) K \frac{\rho_{v0}^2 L_{v0}^2}{\rho_L c_L T_0}$$

となる。ただし、蒸気密度、潜熱は ρ_{v0}, L_{v0} を代表値とした。

液体圧力のステップ変化 $p_{L^\infty}(t > 0) = p_{L^\infty}^*$ に対する半径変化は、

式(2.5.30)の熱輸送項 $(p_{vw} - p_{v0})$ が支配的ならば、

$$p_{v0} - p_{L^\infty}^* = p_{v0} - p_{vw} \text{ に従う。}$$

よって、

$$p_{v0} - p_{L^\infty}^* = p_{v0} - p_{vw} = g(K) K \frac{\rho_{v0}^2 L_{v0}^2}{\rho_L c_L T_0} \quad (2.5.50)$$

式、(2.5.40)を使って K を R の置き換えると、 $K = \frac{R(t)}{\sqrt{D_r t}}$ より

$$R = (p_{v0} - p_{L^\infty}^*) \frac{\rho_L c_L T_0}{\rho_{v0}^2 L_{v0}^2} \times \frac{\sqrt{D_T t}}{g(K)} \quad (2.5.51)$$

となる。

この(52.5.51)で $g(K)$ が定数 $(\pi/12)^{1/2}$ であれば、気泡半径が t の $1/2$ 乗に比例して変化する。

この結果は、(2.5.35)とは異なる。

液体圧力のステップ変化に対しては、慣性項支配の解(2.5.35)からスタートして、時間の経過と共に熱輸送項支配の解(2.5.51)に移行する。

移行の特性時間 t_c は慣性項 $(dR/dt)^2$ と熱輸送項のオーダー比から、

$$t_c = \frac{p_{v0} - p_{L^\infty}^*}{\rho_L} \frac{1}{\Sigma^2} \quad (2.5.52)$$

ただし、 Σ^2 は液体の熱力学的特性にのみ依存するパラメーターをまとめたものであり、

$$\Sigma^2 = \frac{\rho_{v0}^4 L_{v0}^4}{\rho_L^3 \lambda_L c_L T_0^2} \quad [m^2/s^2] \quad (2.5.53)$$

である。

10.4 準静的な不凝縮ガスの析出

準静的な半径変化では、液体側の圧力 p_L は一定値 p_{L0} であると考え、簡単のため気泡内の温度を一定とみなす、蒸気圧は0とする。

液体中における不凝縮ガス物質輸送を表す拡散方程式は

$$\frac{\partial \rho_{gL}}{\partial t} + u_L \frac{\partial \rho_{gL}}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 D_{gL} \frac{\partial \rho_{gL}}{\partial r} \right) \quad (2.5.54)$$

となる。ここで、 ρ_{gL} は液体中の不凝縮ガス濃度、 D_{gL} は液体中における不凝縮ガスの物質拡散係数である。

また、 $\rho_{gL} \ll \rho_L$ より、液体流通 u_L は式

$$u_L = \frac{R^2}{r^2} \frac{dR}{dt} \quad (2.5.12)$$

と一致する。

気泡内不凝縮ガス質量の時間的变化は、気泡表面における不凝縮ガス質量流束とのつりあいから、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_g \right) = 4 \pi R^2 D_{gL} \frac{\partial \rho_{gL}}{\partial r} |_w \quad (2.5.55)$$

準静的変化を仮定しているので、気泡内不凝縮ガス圧は、常に周囲とつりあう。

$$p_g = p_{L0} + \frac{2\sigma}{R} \quad (p_{L0} = p_{L0} - p_{v0}) \quad (2.5.56)$$

さらに、等温過程なので気泡内不凝縮ガス密度は

$$\frac{p_g}{\rho_g} = R_g T_0 = \text{const.} \quad (2.5.57)$$

一方、気泡表面液体の不凝縮ガス濃度は、ヘンリーの法則から、気体圧力に比例する。

$$\rho_{gLW} = \alpha p_g \quad (2.5.58)$$

また、 $p = p_{L0}$ における液体中の不凝縮ガス飽和濃度を ρ_{sgL} とすると、

$$\frac{\rho_{gLW}}{\rho_{sgL}} = \left(1 + \frac{2\sigma}{p_{L0} R} \right) > 1 \quad (2.5.59)$$

さて、式(2.5.54)は、熱輸送方程式(2.5.36)を同型の拡散方程式であり、

(2.5.54)の Birkhoff による解は

$$R \frac{dR}{dt} = G_{gL} \frac{\rho_{gL0} - \rho_{sgL} (1 + 2\sigma / p'_{L0} R)}{\rho_{g\infty} (1 + 4\sigma / 3p'_{L0} R)} \times \sqrt{\frac{3}{\pi}} \left(0.9253 + \frac{R}{\sqrt{D_{gT} t}} \right) \quad (2.5.60)$$

ただし、 $\rho_{g\infty} = \alpha p'_{L0}$ とした。

液体中の不凝縮ガス濃度 ρ_{gL0} が飽和濃度 ρ_{sgL} に等しい場合は $\frac{dR}{dt} < 0$ となり気泡は収縮する。

1.1. 音場中の気泡の成長

圧力一定のもとでは、不凝縮ガスが過飽和でない限り、気泡は消滅する。これに対して、音響場の中に置かれた気泡では不足飽和状態でも、不凝縮ガスの析出による気泡の成長が見られる。この現象が音響キャビテーション発生の原因となり、また、液体中の溶存ガス除去促進にも利用される。

気泡への不凝縮ガス析出量は式(5.5.55)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_g \right) = 4 \pi R^2 D_{gL} \frac{\partial \rho_{gL}}{\partial r} \Big|_W \quad (2.5.55)$$

による。

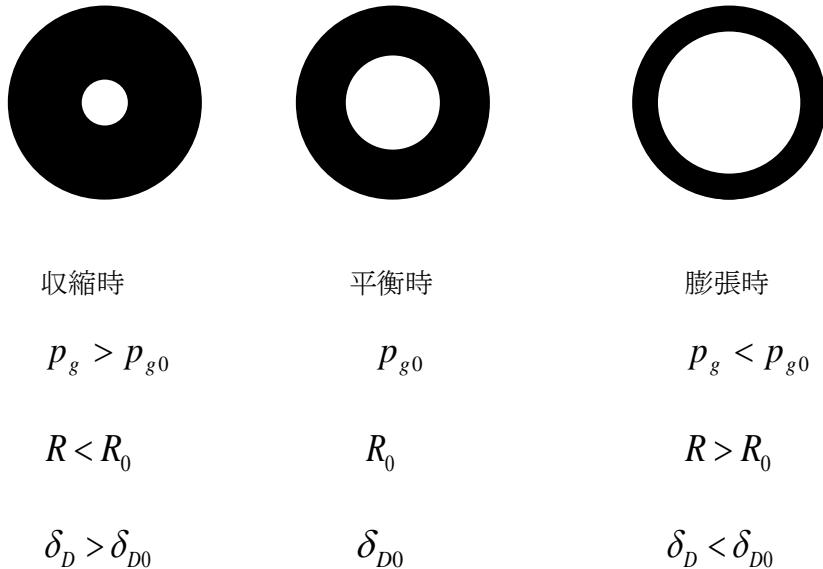
液体中の濃度境界層厚さを δ_D とすれば、単位時間あたりのガス析出・溶解量は

$$\dot{m}_g \propto R^2 \times (\rho_{gi0} - \rho_{giW}) / \delta_D \quad (2.5.61)$$

となる。

これに踏まえて、図 2.5.6 に示す現象のメカニズムを説明する。

図 2.5.6



まず、気泡表面液体の不凝縮ガス濃度 ρ_{gLW} はヘンリ一の法則

$$\rho_{gLW} = \alpha p_g \quad (2.5.58)$$

にしたがって、収縮・膨張する圧力変動とともに、上昇・低下する。濃度が上昇する凝縮時には気泡内の不凝縮ガスが液体に溶解し、濃度が低下する膨張時にはガスは気泡へ析出する。

この際、気泡表面積は膨張時のほうが大きいため、膨張・収縮の 1 サイクルで見るとわずかながら析出量が勝ると考えられる。

音波の振動数が大きな場合には、液体内に溶けているガスの拡散が起こらないので、気泡の成長は鈍る。

振動数が小さい場合は、膨張したときは、液体内のガスが気泡内に析出し、気泡の周囲のガスの濃度が減少する。収縮が始まる前に液体内に溶け込んでいるガスの拡散によって濃度が元に戻る。

収縮によって、気泡内のガスが周囲の溶液に溶け込む。周囲の液体内に溶けているガスの濃度があまり下がらないので溶け込む量は少なくなる。

この過程を繰り返して、低周波の場合のほうが気泡は成長すると考えられる。

次に、表面近傍液体中の不凝縮ガス濃度境界層は、膨張時には薄く、収縮時には厚くなる。境界層厚さが薄くなるについて、拡散による物質輸送が顕著になるとすると、やはり、膨張による析出量が収縮による溶解量を上回ることになる。

微小(線形)振動

音響場中の気泡膨張・収縮運動は、バネーマス系の強制振動とみなせる。

微小圧力変動（角振動数 ω 、平衡圧力 p_{L0} 、圧力変動 Δp_L ）のもとで考える。

$$p_{L\infty} = p_{L0} + \Delta p_L \exp(i\omega\tau), |\Delta p_L / p_{L0}| \ll 1$$

この水圧変動に対する気泡半径の変化が

$$R(t) = (1+x(t))R_0, |x| \ll 1$$

であるとすれば、圧力変動を扱える、

Keller の式

$$\left(1 - \frac{1}{a_{L\infty}} \frac{dR}{dt}\right) R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3a_{L\infty}} \frac{dR}{dt}\right) \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\rho_{L\infty}} \left(1 + \frac{1}{a_{L\infty}} \frac{dR}{dt} + \frac{R}{a_{L\infty}} \frac{d}{dt}\right) (p_{LW} - p_{L\infty}) \quad (2.5.18)$$

($a_{L\infty}$ は無限遠点での音速。) に代入する。

$$p_{LW} = -4\eta_L \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{2\sigma}{R} + p_{GW}, \quad p_{GW} = p_g + p_v$$

さらに、微小量として、 $x(t), \frac{R_0}{a_{L\infty}}, \Delta p_L, \eta, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2 x}{dt^2}$ を考える。

2次の微小量はゼロと考えると、 $\frac{1}{1+x} = \frac{1-x^2}{1+x} = 1-x$ となるので、代入の結果は

右辺は

$$\frac{1}{\rho_{L\infty}} \left(1 + \frac{R_0}{a_{L\infty}} \frac{dx}{dt} + \frac{(1+x(t))R_0}{a_{L\infty}} \frac{d}{dt}\right)$$

$$\begin{aligned}
& \times (-4\eta_L \frac{1}{(1+x(t))R_0} R_0 \frac{dx}{dt} - \frac{2\sigma}{R} + p_{GW} - p_{L0} - \Delta p_L \exp(i\omega\tau)) \\
& = \frac{1}{\rho_{L^\infty}} \left(1 + \frac{R_0}{a_{L^\infty}} \frac{dx}{dt} \right) (-4\eta_L (1-x(t)) \frac{dx}{dt} - \frac{(1-x(t))2\sigma}{R_0} + p_{GW} - p_{L0} - \Delta p_L \exp(i\omega\tau)) \\
& \quad + \frac{1}{\rho_{L^\infty}} \left(\frac{(1+x(t))R_0}{a_{L^\infty}} \frac{d}{dt} \right) (-4\eta_L (1-x(t)) \frac{dx}{dt} - (1-x(t)) \frac{2\sigma}{R_0} - \Delta p_L \exp(i\omega\tau)) \\
& = \frac{1}{\rho_{L^\infty}} (-4\eta_L (1-x(t)) \frac{dx}{dt} - \frac{(1-x(t))2\sigma}{R_0} + p_{GW} - p_{L0} - \Delta p_L \exp(i\omega\tau)) \\
& \quad + \frac{1}{\rho_{L^\infty}} \frac{R_0}{a_{L^\infty}} \frac{dx}{dt} (-4\eta_L \frac{dx}{dt} - \frac{2\sigma}{R_0} + p_{GW} - p_{L0} - \Delta p_L \exp(i\omega\tau)) \\
& \quad + \frac{1}{\rho_{L^\infty}} \left(\frac{(1+x(t))R_0}{a_{L^\infty}} \right) (4\eta_L \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - 4\eta_L (1-x(t)) \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} \frac{2\sigma}{R_0} - \Delta p_L i\omega \exp(i\omega\tau)) \\
& = \frac{1}{\rho_{L^\infty}} (-4\eta_L \frac{dx}{dt} - \frac{(1-x(t))2\sigma}{R_0} + p_{GW} - p_{L0} - \Delta p_L \exp(i\omega\tau)) \\
& \quad + \frac{1}{\rho_{L^\infty}} \frac{R_0}{a_{L^\infty}} \frac{dx}{dt} (p_{GW} - p_{L0})
\end{aligned}$$

左辺は、

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{1}{a_{L^\infty}} R_0 \frac{dx}{dt} \right) (1+x(t)) R_0 R_0 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3a_{L^\infty}} R_0 \frac{dx}{dt} \right) \left(R_0 \frac{dx}{dt} \right)^2 \\
& = R_0 R_0 \frac{d^2x}{dt^2}
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
& R_0 R_0 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\rho_{L^\infty}} (4\eta_L \frac{dx}{dt} + \frac{(1-x(t))2\sigma}{R_0} - p_{GW} + p_{L0}) - \frac{1}{\rho_{L^\infty}} \frac{R_0}{a_{L^\infty}} \frac{dx}{dt} (p_{GW} - p_{L0}) \\
& = \frac{1}{\rho_{L^\infty}} (-\Delta p_L \exp(i\omega\tau))
\end{aligned}$$

$$R_0 R_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\rho_{L\infty}} (4\eta_L - \frac{R_0}{a_{L\infty}} (p_{GW} - p_{L0})) \frac{dx}{dt} + \frac{-2\sigma}{\rho_{L\infty} R_0} (x(t) + p_{GW} \frac{R_0}{2\sigma} - p_{L0} \frac{R_0}{2\sigma}) \\ = \frac{1}{\rho_{L\infty}} (-\Delta p_L \exp(i\omega\tau))$$

となる。さらに、 $(x(t) + p_{GW} \frac{R_0}{2\sigma} - p_{L0} \frac{R_0}{2\sigma})$ を改めて $x(t)$ とおけば、

？？

微分方程式 $\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = -\frac{\Delta p_L}{\rho_{L\infty} R_0^2} \exp(i\omega\tau)$ を得る。

ただし、

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\rho_{L\infty} R_0^2} \left(3\kappa p_{g0} - \frac{2\sigma}{R_0} \right)$$

$$p_{g0} = p'_{L0} + \frac{2\sigma}{R_0}$$

$$p'_{L0} = p_{L0} - p_{V0}$$

これに対して、Crum は音響による影響を考えた式を次のように表した。

$$R_E \frac{dR_E}{dt} = G_{gL} \frac{\rho_{gL0} - (\Gamma_3 / \Gamma_2) \rho_{SGL}}{\rho_{g\infty} (1 + 4\sigma / 3 p'_{L0} R_E)} \times \left(\Gamma_1 + \sqrt{\Gamma_2} \frac{R_E}{\sqrt{D_{gT} t}} \right) \quad (2.5.70)$$

ここで、 R_E は $p = p_{L0}$ における平衡半径。 R_E は R_0 から徐々に変化してゆく。

ここで、

$$\Gamma_1 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \frac{R(t)}{R_E} dt = 1 + \frac{\theta_1}{\theta_2} \left(\frac{\Delta p_L}{p'_{L0}} \right)^2 \quad (2.5.71.1)$$

$$\Gamma_2 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left(\frac{R(t)}{R_E} \right)^4 dt = 1 + \frac{4\theta_1 + 3}{\theta_2^2} \left(\frac{\Delta p_L}{p'_{L0}} \right)^3$$

$$\Gamma_3 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \left(\frac{R(t)}{R_E} \right)^4 \left(\frac{p_g(t)}{p'_{L0}} \right) dt = \left[1 + \frac{(4-3\kappa)[\theta_1 - 3(\kappa-1)/4]}{\theta_2^2} \times \left(\frac{\Delta p_L}{p_{L0}} \right)^2 \right] \left(1 + \frac{2\sigma}{R_E p'_{L0}} \right)$$

$$\theta_1 = \frac{1}{4\omega_0^2} \left(\frac{1}{\rho_L R_E^2} \left(3\kappa(3\kappa+1)p_{g0} - \frac{4\sigma}{R_E} \right) - \omega^2 \right)$$

$$\theta_2 = \frac{\rho_L R_E^2}{p_{L0}} \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\beta\omega)^2}$$

気泡が成長する条件は $\frac{dR_E}{dt} > 0$ であり、これは

$$\left(\frac{\Delta p_L}{p_{L0}} \right)^2 \geq \frac{\theta_2^2 (1 + 2\sigma/R_E p_{L0} - \rho_{GL0}/\rho_{SGL})}{(4\theta_1 + 3)(\rho_{GL0}/\rho_{SGL}) - (3\kappa - 4)(3(\kappa - 1)/4 - \theta_1)(1 + 2\sigma/R_E p'_{L0})}$$

となる。ここで、

水中気泡では表面張力 $\sigma = 68 \text{ mN/m}$

$$\kappa = \frac{1}{3} \operatorname{Re}(F)$$

$$\beta = \beta_A + \beta_T + \beta_V$$

$$\beta_A = \frac{\omega^2 R_0}{2a_{L\infty}}, \quad \beta_T = \frac{p_{g0}}{2\rho_{L\infty}\omega R_0^2} \operatorname{Im}(F), \quad \beta_V = \frac{2\eta_L}{\rho_{L\infty} R_0^2}$$

$$F(\theta) = \frac{3\gamma\theta^2}{\theta[\theta + 3(\gamma - 1)A_-] - 3i(\gamma - 1)(\theta A_+ - 2)}$$

$$\theta = R_0 \sqrt{\frac{2\omega}{(\lambda_{g0}/\rho_{g0}c_{pg})}}$$

$$A_{\pm} = \frac{\sinh \theta \pm \sin \theta}{\cosh \theta - \cos \theta}$$

ここで、

λ_{g0} : 平衡状態における気泡内ガス熱伝導率

c_{pg} : 低圧比熱

ρ_{g0} : 密度

γ : 比熱比

平衡状態での気泡半径を R_0 、液体圧力を p_{L0} とすれば、平衡状態では半径の変化は無いから、(2.5.15)式より

$$p_{L0} = -\frac{2\sigma}{R} + p_{g0} + p_{v0} \quad \text{を得る。}$$

平衡状態での蒸気圧は、そのときの温度 T_0 での飽和蒸気圧 $p_{SV}(T_0)$ となるので、

$$p_{g0} = \frac{2\sigma}{R} + p_{L0} - p_{SV}(T_0) \quad (2.5.21)$$

となる。

たとえば、1気圧 (101.3kPa)、20°C (293.15K)、半径 $10\mu\text{m}$ 、
20°Cで $\sigma = 72.75(\text{mN/m})$ 、

飽和水蒸気圧は Tetens(1930)の式 $E(t)=6.11\times10^{(7.5t/(t+237.3))}$ で、温度 t °Cにおける飽和水蒸気圧 $E(t)$ hPa を求める。20°Cでは、 $23.39*100$ (Pa) となる。

$$p_{g0} = 101.3*10^3 - 23.39*10^2 + \frac{2*72.75*10^{-3}}{10*10^{-6}} = 113.5*10^3 (\text{Pa})$$

不凝縮ガス圧は大気圧より大きくなり、ガスが液体中に徐々に溶け込んで気泡は消えてしまう。

表 5.5: 物質の熱伝導率(常圧)

物質	温度 [°C]	熱伝導率 κ [W·m ⁻¹ ·K ⁻¹]
空気	0	$\times 10^{-2}$ 241
水	0	0.561
氷	0	2.2

熱伝導率 κ とは、厚さ $a = 1\text{m}$ の物質で隔てられた面積 $A = 1\text{m}^2$ の

2つの面に 1K の温度差があるとき、 $\Delta t = 1$ 秒間に流れる熱量 ΔQ [J]を表す。は仕事率の単位である。

$$[\text{W}] (\text{ワット}) = [\text{J}/\text{s}]$$

4. 液体の慣性力が支配する場合の泡の膨張・収縮運動

この場合次の方程式を用いる

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \rho v_L + r^2 \frac{\partial(\rho v_L)}{\partial r} \right) \\ &= -\frac{2\rho v_L}{r} - \frac{\partial(\rho v_L)}{\partial r}\end{aligned}$$

と、

$$\frac{\partial u_L}{\partial t} + u_L \frac{\partial u_L}{\partial r} = -\frac{1}{\rho_L} \frac{\partial p_L}{\partial r}$$

境界で

$$V = \dot{R} = \frac{dR}{dt}$$

$$p + \frac{2\sigma}{R} = p' + \frac{4\mu}{3} \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} \right) \quad ? ? ? ? ? ? ? ? ?$$

が成立する。

4. 1 境界の膨張・収縮速度が液体の音速よりも十分小さい場合

この場合は液体の密度 ρ を一定として扱うことができる。

$$u_L = \frac{R^2}{r^2} \frac{dR}{dt} \quad (2.5.12)$$

式、(2.5.12)を運動方程式(2.5.9)に代入すると、

$$\frac{1}{r^2} \left[R^2 \frac{d^2 R}{dt^2} + 2R \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] - \frac{2}{r^5} \left[R^4 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] = -\frac{1}{\rho_L} \frac{\partial p_L}{\partial r} \quad (2.5.13)$$

式(2.5.13)を r から ∞ まで積分すると、

$$\int_r^\infty \frac{1}{r^2} dr = \left[\frac{-1}{r} \right]_r^\infty = \frac{1}{r}, \quad \int_r^\infty \frac{1}{r^5} dr = \left[\frac{-1}{4r^4} \right]_r^\infty = \frac{1}{4r^4} \text{ より}$$

$$\frac{1}{r} \left[R^2 \frac{d^2 R}{dt^2} + 2R \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] - \frac{1}{2r^4} \left[R^4 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] = \frac{1}{\rho_L} (p(r) - p(\infty))$$

$$p(r) = p(\infty) + \rho \left(\frac{1}{r} \left[R^2 \frac{d^2 R}{dt^2} + 2R \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] - \frac{1}{2r^4} \left[R^4 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] \right)$$

を得る。

これを、(4.42)式に代入して $r = R$ とすると、

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{1}{\rho} \left\{ p'(R) - p_\infty(t) - \frac{4\mu\dot{R}}{R} - \frac{2\sigma}{R} \right\} \quad (4.45)$$

を得る。(Rayleigh-Rlesset の式)

いま、(4.45)式で $p'(R) = p'_v = \text{const.}$ 、 $p_\infty = \text{const.}$ 、 $(p_\infty > p'_v)$ 、 $\mu = 0$ 、 $\sigma = 0$

の特別な場合について考える。

$(p_\infty > p'_v)$ は泡がつぶれる場合に対する条件である。このとき、(4.45)は積分できて

$$\dot{R}^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{p_\infty - p'_v}{\rho} \right) \left\{ \frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right\} \quad (4.46)$$

を得る。

ここで、 R_0 はつぶれる前の泡の初期半径である。(4.46)式は、泡の境界の速度を表している。この式をもう一度積分すれば、半径が零となるまでの時間

$$\tau = 0.915 R_0 \left(\frac{\rho}{p_\infty - p'_v} \right) \quad (4.47)$$

を得る。ここで、 $R_0 = 10^{-3} m$ 、 $p_\infty - p'_v = 10^2 kPa$ 、 $\rho = 10^3 kg/m^3$ とすると、

$\tau = 9.15 * 10^{-5} s$ となる。

つぎに、泡の周辺の液体中に発生する圧力について調べる。44,45 式から、

$$\frac{p - p_\infty(t)}{\rho} = - \left(\frac{p_\infty(t) - p'_v}{\rho} \right) \frac{R}{r} + \frac{1}{2} \dot{R}^2 \left(\frac{R}{r} - \frac{R^4}{r^4} \right) \quad (4.48)$$

を得る。

(4.48)式の右辺第 2 項は正で大きく、 $r = 4^{1/3} R$ で正の極大値 $3/8 \cdot \dot{R}^2 / 4^{1/3}$ を持っている。

また、 $R \rightarrow 0$ での最大圧力の漸近値 p_{\max} は

$$p_{\max} - p_\infty \sim 4^{-4/3} (p_\infty - p'_v) \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \quad (4.49)$$

となる。

$p_\infty - p'_v = 10^2 kPa$ の圧力差で静止状態からつぶれていく泡に対して、液体中の最大圧力は、半径が初期半径の 0.1 倍、収縮速度が $260 m/s$ のときに約 $16 MPa$ に達し、泡がつぶれていくにつれてどんどん大きくなっていく。

次に、泡の中に蒸気とガスの混合気体が入っている場合の泡の膨張・収縮運動を解析する。蒸気圧 p'_v は一定、

ガス圧 p'_g は断熱変化の式に従うものとすると、(4.45)式の $p'(R)$ は

$$p'(R) = p'_v + \left(p_{\infty 0} - p'_v + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3r} \quad (4.50)$$

ここで、 $p_{\infty 0}$ は液体の初期圧力である。

(4.50)式を用いると、(4.45)式は次のようになる。

$$R \ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 = \frac{1}{\rho} \left\{ \left(p_{\infty 0} - p'_v + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R}{R_0} \right)^{3r} - p_{\infty}(t) + p'_v - \frac{4\mu \dot{R}}{R} - \frac{2\sigma}{R} \right\} \quad (4.51)$$

この(4.51)式を用いて、蒸気、ガスの混合ガスを含む泡にステップ状の圧力が加えられた場合の、泡の運動を調べる。

今、 $p_{\infty}(t) = p_{\infty} = \text{const.}$ とする。(4.51)式は積分できて、 $\dot{R}(t=0)=0$ とすると、

$$\dot{R}^2 = \frac{2 \left(p_{\infty 0} - p'_v + \frac{2\sigma}{R_0} \right)}{3(\gamma-1)\rho} \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \left\{ 1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3r-3} \right\} - \frac{2(p_{\infty} - p'_v)}{3\rho} \left\{ 1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \right\} - \frac{2\sigma}{\rho R} \left\{ 1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \right\} \quad (4.52)$$

$R = R_{\min}$ のとき、 $\dot{R} = 0$ となるから、 $R_{\min} \ll R_0$ として、

$$R_{\min} \cong R_0 \left\{ 1 + \frac{3(\gamma-1)}{p_{\infty 0} - p'_v + \frac{2\sigma}{R_0}} \left(\frac{p_{\infty} - p'_v}{3} + \frac{\sigma}{R_0} \right) \right\}^{-\frac{1}{3(r-1)}} \quad (4.53)$$

を得る。

このとき、境界のところでの液体圧力は最大となり、(4.44)式で $r=R$ とおいて、 \ddot{R} を(4.51)式を用いて消去すると、

$$p_{\max} \cong \left(p_{\infty 0} - p'_v + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R_{\min}} \right)^{2r} - \frac{2\sigma}{R_{\min}} + p'_v \quad (4.54)$$

とな

* *

8.3.5 「安全対策」の意味

金属疲労による落下

飛行機の事故では金属疲労の話をよく聞きます。風車でも起こります。

金属疲労で1メートルの亀裂 京都・伊根町の風力発電所事故で専門家会議

2013/8/5 08:53

産経WEST | できごと



広告 エンジニア諸君
スキル偏差値 70へ
挑戦せよ

<GitHub>でスキル偏差値を見る
サクッと50秒でエンジニアスキル偏差値がわかる！

Findy

もっと見る

今年3月、太鼓山風力発電所（伊根町）で、風力発電機の鉄製タワーが折れ風車部分が落下した事故をめぐり、事故原因について検証している府の専門家会議が4日、京都市内で開かれ、金属疲労によって長さ約1メートルの亀裂ができ、それが広がったことで破断につながった、とする検証結果をまとめた。

同会議によると、外観調査や金属組織の分析から、3枚の羽根（長さ25メートル）と発電機など計45トンが溶接された鉄製タ

ワー（高さ50メートル）の上端部付近で、金属疲労による亀裂ができていたことを確認した。

金属疲労の原因是、特別に大きな力が働いたことではありません。

金属疲労は、比較的小さい応力でも繰返し受けることで、材料に小さな割れが発生し、それが少しづつ進行して、最終的には破壊にいたる現象です。

金属疲労がなぜ問題になるのか？

金属が破壊するのにはいくつかのパターンがあります。

最も単純なケースとして引張試験のように応力をかけ続け破壊するものです。この場合、破壊の前に変形が起るため、確認は容易です。

しかし、金属疲労の場合、大きな変形は起きずに小さな割れが起こるだけです。そのため、疲労の発生確認と破壊までの予想時間が困難です。

金属材料は自動車や航空機、建築物などに使用されています。これらはほとんど常に応力がかかる状態であるため、金属疲労が起こります。実際の金属材料の不具合や事故の多くはこの金属疲労が原因です。

2 事故の状況

- (1) 事故発生時の気象状況・風況
- (2) 事故が発生した3月12日の3号機の風況観測データから、事故発生前は概ね南西の風、最大風速約15～20m/s、1分間平均風速約11～15m/sで推移しており、事故時に突風などの大きな風況の変化があったとは考えられない。
- (3) 3号機の風況データ及び運転状況を図2-1に示す。

4 タワー破断面の損傷状況

タワー破断面の円周方向の状況を確認するため、図2-4に示す「フランジ下端から破断部までの寸法」の測定を行った。その結果、ボルトNo13～23の範囲で寸法がほぼ一定でフランジ下端が最も近くなっている。ちょうど溶接止端部と一致している。

のことから、ボルトNo13～23の範囲でまず疲労き裂が進み、それ以外の範囲で延性破壊に変化し引き続き進展したと推定される

イ 断面組織観察及びSEM観察

疲労破断と推定されるボルトNo.13～23、および、延性破断と推定された範囲について、それぞれ、断面組織観察およびSEM観察を行い、破断状況を確認した。

(ア) 疲労破断状況

- (イ) ボルトNo.13～23の範囲内のタワー破断箇所の断面組織観察及びSEM観察結果、疲労破面に特徴的な以下の状況が確認されたことから、疲労破断であることが確認された。観察状況を次ページ「タワー破断部の観察結果(No1)」に示す。
 - (ウ) ① 疲労破面に特徴的な断面組織に変形が無く破断している。(写真4参照)
 - ② き裂発生後、応力の変動により破断面が繰り返し開閉して押しつぶされた痕がある。
(写真4参照)
 - ③ SEM観察により、疲労破面に特徴的なストライエーションが観察される。(写真5参照)
 - ④ き裂発生の起点に特徴的なラチエットマークが内面側の溶接止端部に観察される。(写真6参照)
 - ⑤ き裂の進行がタワー内面から外面向かい進行している。また外側にて疲労き裂から引き続き延性破断面に遷移している部位があることが観察される。

ナセル落下を写真 1-1 にタワーの破断状況を写真 1-2 に示す。
また、タワートップ及びナセルの断面図を図 1-3 に示す。



写真 1-1 ナセル落下

このような事故が起これば、GPI にとっても、大きな損失です。

強風による落下

シーテック社の事故は、

ウインドパーク笠取発電所 CK-19 号機風車 ナセル脱落事故について（ご報告）

1. ウインドパーク笠取発電所の設備概要と今回の事故概要

(1) ウインドパーク笠取の概要(図 1)

- ・所 在 地：三重県津市美里町および伊賀市上阿波地内
(CK-19 号機風車は津市美里町)
- ・定 格 出 力：38MW(2,000kW×19 基)
- ・運 転 開 始：第 1 期平成 22 年 2 月 22 日

第 2 期平成 22 年 12 月 15 日 (19 号機風車は第 2 期分)



(2) 風力発電設備の概要(図 2)

- ・風 車：(株)日本製鋼所社製
- ・定 格 出 力：2,000kW
- ・定格回転数：19rpm (毎分回転数)
- ・ロ ー タ：直径 83.3m、ハブ取付高さ 地上 65m

図 1 発電所位置図

(3) 事故の概要（写真 1）

- ・推定発生日時：平成 25 年 4 月 7 日 16 時 37 分～16 時 55 分の間
- ・事故の状況：発電機・ナセル・ブレードが脱落



写真 1 タワー座屈・ブレード・ナセル脱落状況

2. 事故当日の気象と風況

- ・三重県は 4 月 6 日（土）夕方より発達した低気圧に見舞われ、ウインドパーク笠取においては 4 月 7 日（日）未明より風速 20m/s 超過が多々発生していた。
- ・4 月 7 日 15 時前後には、カットアウト風速（※1）25m/s となり、16 時 27 分には最大瞬間風速 42m/s を記録した。なお、西北西の風であった。

（※1）カットアウト風速：安全のために自動停止する風速

- ・4 月 7 日事故発生の直前（16 時 37 分：記録として最終時間）の CK-19 号機風車における風速観測データは、風速 20.67m/s、平均風速 27.9m/s

近年、台風が大型化して被害が大きくなっています。強風が吹くときは風車を停止するとは思いますが、この事故では、最大瞬間風速 42 m でナセル部分が落下しました。

風車は、風速何メートルまで耐えられるように設計されているのでしょうか？準備書からそのデータを見つけることが出来ませんでした。風車が耐えることができる風速を教えて下さい。また、ブレードに関する耐荷重テストの結果の詳細も示して下さい。

当然調査しているとは思いますが、2019 年に千葉県に来た台風の時の風は、

最大瞬間風速

58.1 m/s (209.2 km/h)：神津島（東京都、8 日 21 時 03 分）

57.5 m/s (207.0 km/h)：千葉（千葉県、9 日 4 時 28 分）

52.0 m/s (187.2 km/h)：新島（東京都、8 日 23 時 38 分）

49.0 m/s (176.4 km/h)：木更津（千葉県、9 日 2 時 48 分）

でした。

さて、安全対策についてですが、

GPIは要約書の中で次のように述べている。

※環境影響評価方法書では、(仮称)平木阿波ウインドファーム事業：発電所出力最大24,000kW、単機出力3,000kW級を8基程度、(仮称)ウインドファーム津芸濃事業：発電所出力最大48,000kW、単機出力3,000kW級を16基程度の計画としていたが、現地調査結果等を踏まえ、風力発電機の基数及び配置計画を再検討した。方法書時の出力等との比較を表2.2-1に示す。

表2.2-1 発電所の出力等（方法書との比較）

対象事業の名称	項目	準備書	方法書
(仮称)平木阿波ウインドファーム事業	単機出力	4,200kW	3,000kW級
	設置基数	6基	8基程度
	総発電出力	25,200kW	最大24,000kW
(仮称)平木阿波第二ウインドファーム事業 (方法書段階の事業名：(仮称)ウインドファーム津芸濃事業)	単機出力	4,200kW	3,000kW級
	設置基数	3基	16基程度
	総発電出力	12,600kW	最大48,000kW

そして、このことを安全保安措置の1番目に挙げている。

【環境保全措置】

- ・風力発電機の設置基数を、(仮称)平木阿波ウインドファーム事業では8基から6基に、(仮称)平木阿波第二ウインドファーム事業(方法書では、(仮称)津芸濃事業)では16基から3基に削減した。
- ・風力発電機の配置位置を可能な限り住居等から離隔した計画とした。
- ・風力発電設備の適切な点検・整備を実施し、性能の維持に努め、低周波音の原因となる異音等の発生を低減する。

風車の基数は減っているので、一見すると知事意見に配慮したかに見える。よく見ると、平木阿波ウインドファーム事業(以下、平木阿波と記す。)では、総発電量は増加している。

しかも単機出力が4200kWとなっている。これでは、さらに強力な超低周波音がその周辺に放出される。音は周波数が低くなればなるほど、距離が長くとも減衰しなくなる。

多くの風車の騒音では、風車群の中心から3kmの範囲がかなりの影響を受ける地域である。大型化によってさらに周波数が下がり、音圧も高くなると予測されるので、影響は拡大すると考えられる。

大臣意見では、

“現地確認を含めた情報の収集・把握を適切に行った上で、計画段階配慮事項に係る環境影響の重大性の程度

を反映させること。”

とある。

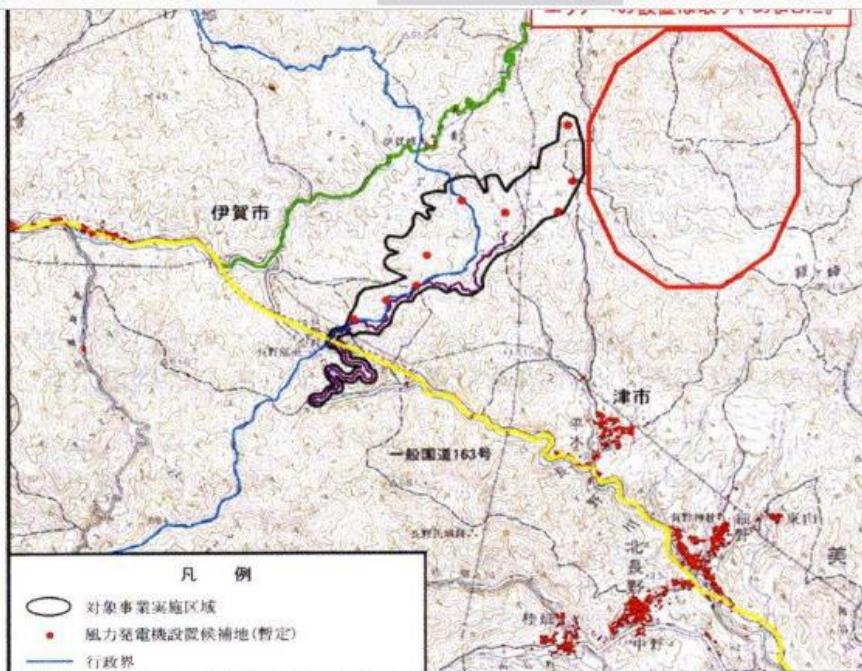
GPI は基数を削減したと主張する。確かに減っている。しかし、これは知事意見に配慮した削減とは認められない。削減したと主張するには、元の計画に合理性が無くてはなりません。

風力発電では、ブレードの破損事故も起きている。破損したブレードの飛散する距離は、安全確保の為に極めて重要である。風車の配置では、飛散したブレードによる破損事故の連鎖を防ぐ必要がある。

風車の前に、他の風車を置けば、ブレードの動きやタワーの存在で、気流が乱れます。風車のブレードにかかる力は、大きく変動します。

これは、金属疲労によって、ブレード破損の可能性が高くなることを意味します。また、発電量の予測が困難となり、採算が取れなくなる可能性が高くなります。

では、GPI のものとの計画はどのようなものであったか。次の地図では、



伊賀市上阿波及び津市美里町平木、芸濃町河内上の上記エリアで風力発電事業を計画しております。景観等への影響に配慮し、風車設置基数を当初計画基数の24基から9基に変更し、検討を進めております。

対象事業の名称	項目	方法書	→ 準備書
(仮称)平木阿波 ウインドファーム事業	単機出力	3,000kW級	4,200kW
	設置基数	8基程度	6基
	総発電出力	最大24,000kW	25,200kW
(仮称)平木阿波第二 ウインドファーム事業	単機出力	3,000kW級	4,200kW
	設置基数	16基程度	3基

楕円形の赤丸の縦 2 km、横 1.5 km くらいである。減らしたという 15 基を並べてみると面積は $\pi * 1 * 1 * 0.75 = 2.36$ であり、 $2.36 / 15 = 0.157 = 0.4 * 0.4$ となり、400m の正方形に 1 基立つことになる。

風車を建設する地形を考えれば、距離が 300m 程度になる場合も考えられる。

風の流れを考えれば、風下に位置する風車は、風上にある風車の回転の影響で不安定な気流を受けることになる。位置によっては、風上から見て4番目、5番目に位置する風車も考えられる。

風速や風向を長期間計測して、良好な風が安定して得られるような場所に風車を設置することを考えるのが採算性から見て常識である。

乱流のために、発電量の予測が困難な形に風車を配置してはいけません。田んぼの稻の苗のように、平面状に風車を配置する計画は、発電量の予測が出来ないので、経済性も予測できなくなる。

このようなものを計画と呼ぶことは、普通の会社は、恥ずかしいことと考えるでしょう。GPIにとっても、恥ずかしくないのであろうか？

他の風車ではあるが、台風などの破損事故が起きている。事故の一つとして次のものがある。

定格出力：30.0 MW (2,000 kW × 15 基)

③ 主要寸法：ローター直径 80m、ローター取付高さ 78 m

破断したブレードは広範囲にわたり飛散した。事故発生時、風車は運転状態であったため、飛散物は風車の風下方向である南東方向へ飛散した。最大飛距離は 263 m であった。

単純な計算では、折れたブレードが地面に落下するまでの時間は、4秒から5秒程度です。この間に 263m の距離まで移送するには、毎秒 66m くらいの大きさの水平方向の速度成分を持っていることになる。

GPI の大型風車のブレードの先端 10m がちょうど、真上に来たときに折れて飛んだとすれば、水平方向に 375m 程度飛んで行くといいう計算も出来る。近くの風車にあたり、連鎖的な破損事故につながる可能性も十分ある。

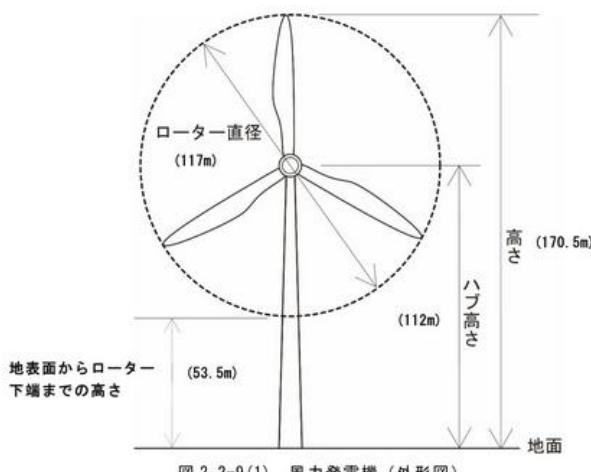
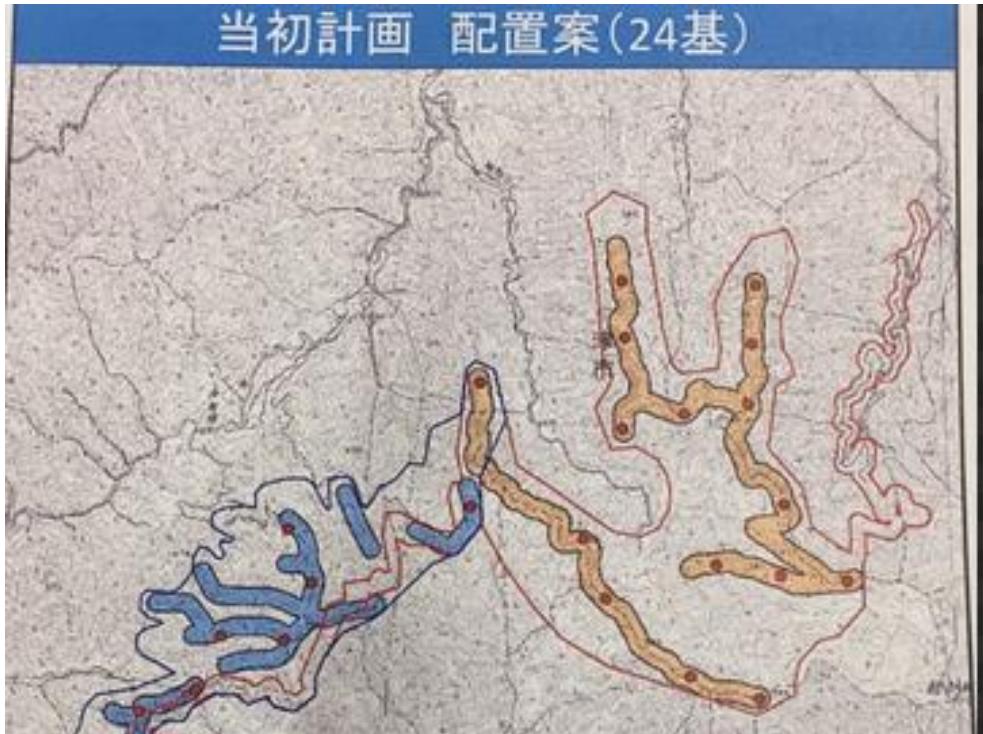


図 2.2-9(1) 風力発電機（外形図）



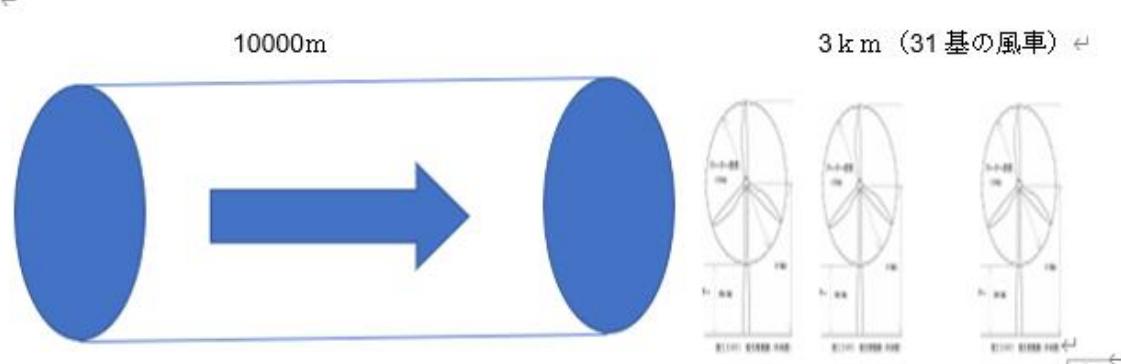
廃止したという部分（下の図）をよく見ると、北北西の風が吹くときには風の向きに沿って 300m おきに、3 台並んでいるようなところがある。この地域では、北北西の風が良く吹くことは、準備書の中に記載されている。GPI は自分が書いたことを忘れたのであろうか？下の図の右の部分の配置では、連鎖事故の可能性が極めて高くなる。



縮小と言うよりは、無謀な計画を隠蔽した。と表現するのが妥当である。

方法書の内容が合理的なものならば話は分かる。方法書の計画からは確かに減ってはいる。でも、バナナのたたき売りのようにしか聞こえないのは、方法書の計画自体が風車建設の常識（風向、風力の計測、安定した風によって安定した発電を実現する、発電量を予測して経済性を確保する。風車事故の被害の低減、などの配慮をする。）からして、あり得ない計画であったのだから、それを削減だとは評価できません。

楕円形の田に稻を植えるような計画の問題点を、エネルギーの保存の観点から確認しましょう。
風車通過後も、風の持つエネルギーが変化しないとして考えると、次のようにになります。



上の図の左側は風、これが右側の風車にあたって発電する。円筒状の気流の部分は長さが 10000m とし、31 基の風車が 100m ごとに立っているとする。

10000m の流体が持つ運動エネルギーの量を 10000E とする。その 5% が電力として得られるとする。最初の風車に風が当たり始めてから、ちょうど円筒形の部分の最後が最初の風車まで来たときに、最初の風車の発電量は、 $10000E * 0.05$,

2番目の風車を通過する風は、通過する風の長さが 100mだけ少ないので、 $9900E * 0.05$

3番目は、 $9800E * 0.05$ 、31番目は、 $7000E * 0.05$ となり、得られるエネルギーの総量は、

$$(10000 + 9900 + 9800 + \dots + 7000) * E * 0.05 = (17000 * 31/2) * E = 263500 * 0.05 * E = 13175 * E$$

となります。風の持つエネルギーは、10000E だったので、 $3175 * E$ だけのエネルギーが湧き出しました。

もし、10mおきに風車を並べれば、風車は 301 基、得られるエネルギーは、

$$10000E * 0.05 + 9990E * 0.05 + \dots + 7000E * 0.05 = 2558500E$$

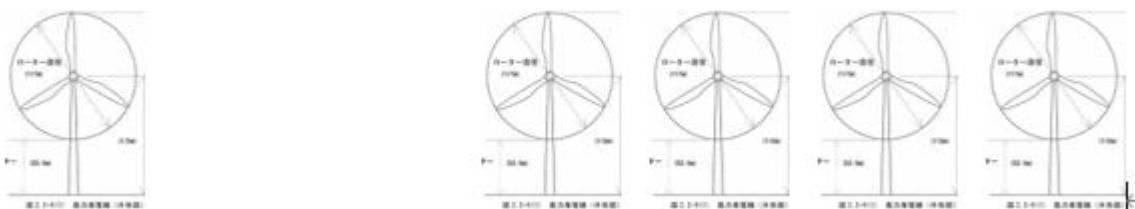
となります。

これは、素晴らしい結果です。

こうなれば、自然の風は要りません。扇風機を並べて、

左の 1 台の扇風機から風をおくり、改造した右側の扇風機から電気を取り出せば、

消費電力の 2558.5 倍 の電力が取り出せます。



むかし、永久機関と言う言葉がありました。エネルギーを無限に生みだす装置です。

GPI の計画に合理性があると考えることは、永久機関を実現できる。と考えることになります。

神様でも、難しい計画です。水田の稻のように、風車を並べてはいけません。

環境保全措置をとった。との言葉は、もともとの計画にある程度の合理性があつてこそ意味を持つ言葉です。ある程度合理性のある計画ではあるが、様々な要素や環境への負荷をさらに削減すべく、風車の台数を削減します。と言える場合である。

物理学を学んだ人は、エネルギー保存の法則を知っています。これを無視することは出来ません。

もともとの計画が、物理法則を無視するような、極めて非常識なものであり、合理性を認められない計画なのだから、それと比べて風車の台数が減ったと言っても、環境保護の措置として減らした。と言ってはいけません。

先ほど、1基あたりの計算でしたが、音圧はエネルギーの一定割合が超低周波音として拡散されると考えるときに、平木阿波に関しては、総発電量が、25200 kWから24000 kWに増えているのだから、音として拡散されるエネルギーも増加すると考えるべきである。かえって被害が増えると考えられる。

GPIは2つの計画での総発電量を減らしたと主張するのであろうが、この計画のように、風車を24基も密集させて建設するという事自体が、自然環境を保持しつつ、住民の健康を守りつつ、自然エネルギーの利用を進めようという立場から見れば、もともと論外の計画である。

減らした、減らしたと主張すること自体が、風車被害に苦しむ多くの人がいる現実を見ようとしている自分勝手な企業であると自ら言っていることになるのです。住民や県知事の苦悩を理解しようとする姿勢を持ってほしいものである。

GPIが風車数を削減する前の計画が、風車建設の計画としてあり得るものだと考えているならば、風車のすぐ風下に3、4基の風車が並んだ時の風速、風向の予測を、どのように行っているのか、計測結果及び流体力学での解析を示しながら、書いて下さい。

また、平面状に風車を並べるような風車建設をしても、赤字にならないと考える理由も書いて下さい。

GPIの環境保全措置

【環境保全措置】

- ・風力発電機の設置基数を、(仮称)平木阿波ウインドファーム事業では8基から6基に、(仮称)平木阿波第二ウインドファーム事業(方法書では、(仮称)津芸濃事業)では16基から3基に削減した。
- ・風力発電機の配置位置を可能な限り住居等から離隔した計画とした。
- ・風力発電設備の適切な点検・整備を実施し、性能の維持に努め、低周波音の原因となる異音等の発生を低減する。

3番目の項目を検討するには、風車からどのような音が出るのかが分からないと議論できません。さらに、なぜその音が出るのかを究明しなくてはなりません。原因が分からなければ効果的な対策は打てません。

残念ながら、“風力発電設備の適切な点検・整備”では、低周波音は防げないのです。すでに示した通り、水平軸を持つ風車の構造そのものが、低周波音の発生装置そのものだからです。

さらに言えば、金属疲労の実験装置そのものなのです。ブレードが回転するたびに、塔を小さくゆします。金属疲労が起きて事故が起きるのは必然的な結果なのです。

したがって、このようなものを建設してはいけないです。

反論があるのならば、GPIの風車からは、どのような音が出るのかを明記してください。そして音の発生する仕組みを示してください。

8.4 風車と環境破壊

8.4.1 崩落の責任と損失

2-4 「方法書」の手続（スコーピング）

「方法書」の手続(スコーピング)

方法書とは、どのような項目について、どのような方法で環境アセスメントを実施していくのかという計画を示したものです。

同じ道路を作る場合でも、自然が豊かな山間部を通過する場合と、大気汚染の激しい都市部を通過する場合とでは、環境アセスメントで評価する項目も違ってきます。

地域に応じた環境アセスメントを行うことが必要であるため、環境アセスメントの方法を確定するに当たっては、地域の環境をよく知っている住民を含む一般の方々や、地方公共団体などの意見を聞く手続を設けています。この手続のことを、「スコーピング」と呼んでいます。

事業者は方法書を作成し、環境アセスメントの項目や方法を確定するに当たっては、環境保全の見地からの意見を有する者や、地方公共団体などの意見を聞く手続を設けています。また、方法書の縦覧期間中には一般の方々などへの理解を推進するため、説明会が開催されます。

環境アセスメントの方法を決定する段階で有益な環境情報や環境保全の見地からの意見を聞くことによって、その意見を評価の項目や方法などに柔軟に反映でき、また、地域の特性に合わせた環境アセスメントが行えるようになります。

とあるが、

住民から、風車用の道路の崩落についての指摘があった。この地域に住む友人は、GPIに対する質問状の中で、

阿波地区的山肌が非常に崩れやすいことを認識しているか、実際にたびたび崖崩れが起きていることは認識しているか、岩石の硬さ、脆さについては調査しているか、ウインドパーク笠取の風力発電施設では土砂崩れが放置されている。



阿波地区で同様の土砂崩れが起きた場合、どう責任を取るのか、またそれをふまえて、風車の振動の、地中での伝達とその影響についてどのように考えるか、そして、その根拠はどのような調査や実験によるものなのか？ と書いていた。

また、他社の工事であるが、かなりの範囲で大規模な崩落が起きている。

10月23日伊賀市市道笠取線の株シーテック社ウインドパーク笠取の崩落現場を見てきました、崩落は5年前です、崩落が進むので株シーテック社が橋梁架け替え工事する、伊賀市に確認しました



写真はウインドパーク笠取の伊賀市上阿波地区からです。
崩落現場の上では風車が稼働しています。発電所内には崩落している所、形跡があります。小委員会でも在りましたが地層は花こう岩、
崩落は風車の振動も一要因の説があります。



元の管理道路

崩落場所

股部川

株シーテック社（笠取）管理道路

株シーテック社が自費で建設をした橋梁（1億円～ 以上）

準備書の記述を見れば、GPI がこのようは実際の崩落に何しては、関心が無いことが明らかです。

住民からの質問が文書で GPI に提出されていて、その中で、崩落についても書かれている。

しかし、GPI は、実際の崩落が起きたときに、どのように責任をとるのか、崩落を防ぐには何が必要かに関して、具体的な崩落事例を踏まえての対応策を示していない。

住民からの意見は、準備書には反映されなかった。貴重な時間を使って、説明会に参加し、意見を言った人の苦労も無視されてしまった。

各段階で、貴重な意見が反映されたものとなっているかどうかを、検証しながら進むべきなのに、すべてを聞き流し、住民からの質問状は無視して答えない。

これでは、慎重に段階を踏んで計画を進めるという、環境影響評価制度の趣旨を根底から破壊する行為としか言えません。文書で出された質問状に文書で答えるかたちでの説明会を開くべきでした。

GPI は、

“これまでの環境影響評価手続きで頂いたご意見や現地調査結果等を踏まえ、風車基数の大幅な削減を含む事業計画の見直しを行いました。引き続き、環境影響に配慮しながら計画の詳細を検討してまいります。”

といいます。しかし、

説明会の前に住民から文書での質問が出ているならば、説明会の前に GPI が文書で回答し、住民が回答をしっかり検討してから、説明会で議論することが必要です。しかし、GPI は質問状を無視して、文書での回答をしなかった。

評価書、方法書、準備書の各段階において、検討課題を明確にし、課題解決の具体案が提起されているか否かを、県や市、住民で確認しながら進めなくてはなりません。GPI が提出した書類には、三重県の専門家たちが審査すべき内容が書かれていなかった。もちろん、記載すべき事項に関して三重県知事が事前に要求していたにもかかわらず、GPI は記載しなかった。

住民が意見を出せるのは、準備書に対する意見が最後です。評価書、方法書、の段階での GPI の回答には、評価できる点はありません。準備書も同様です。中身のない書類で、ことを進めてきた GPI です。

“引き続き、環境影響に配慮しながら計画の詳細を検討してまいります。”と言われても、これまでの経過を見ると、何を検討し、どんな結論を導き出すか、について、まったく信頼が持てません。

崩落した道路の写真を見れば、山が悲鳴を上げて、泣き叫んでいるように見えます。感情論を別にしても、最近の天気予報で出てくる、線状降水帯のことを考えれば、大規模崩落とそれによる大きな災害が予想されます。

準備書に、土砂や水流についての記述がある。

d) 予測方法

現地調査結果による現況と事業計画（造成計画）との比較対照により、浸透能の変化を予測した。

e) 予測結果

事業計画では、主に稜線付近を造成（切土・盛土）して風車ヤード及び管理用道路を構築する。

風車ヤードは主に現在の尾根部に造成される。切土部分に分布する風化を受けた花崗閃緑岩は、節理が発達した比較的浸透能の高い岩盤であると推測されることから、ヤード表面を緑化あるいは砂利舗装等透水性が高い材料にすることで浸透能を確保することができると考えられる。また、花崗閃緑岩には3方向の節理が発達する（特定方向の亀裂を有する岩盤ではない）ため、岩盤中に浸透した水は特定方向に集中的に流れることなく、山中に均一に広がると推測される。

管理用道路は主に稜線からやや下がった山腹斜面上部に造成される。切土のり面と管理用道路への降雨は側溝及び横断溝を通じて近傍の斜面に放流される。また、盛土のり面では、のり面に緑化工を施すことから降雨のうちのある程度は盛土内に浸透してさらに盛土基礎地盤に浸透していき、盛土内に浸透しなかったものは小段排水溝・縦排水溝を通じて斜面に放流される計画である。したがって、斜面から渓流へと流れる現状と比べて、渓流の水量に大きな変化は生じないものと考えられる。

③ 評価の結果

(a) 環境影響の回避、低減に係る評価

事業の実施に伴う土地の安定性の確保等地形及び地質への影響を低減するための環境保全措置は、以下のとおりである。

- ・造成の具体的な設計（切土、盛土）については、施工箇所及び周囲の状況を把握し、必要に応じてボーリング調査や土質調査を実施して施工箇所の安定性を確認した上で、適切な工法を選定する。
- ・特に、対象事業実施区域の大部分に分布する花崗閃緑岩は、風化を受けると表流水等による侵食を受けやすいため、切土部は植生工等ののり面保護工によって安定性を確保する。
- ・風力発電機設置ヤードは、関係機関と協議の上で緑化あるいは砂利等透水性の高い材料で覆う等して、浸透性を確保する。
- ・管理用道路には横断溝を設置により分散排水を行い、侵食防止を図る。
- ・施工前及び施工中には定期的に会議等を行い、工事関係者に環境保全措置の内容の周知徹底を図る。

これらの環境保全措置を講じることで、事業の実施に伴う土地の安定性の確保等地形及び地質への影響は、実施可能な範囲内で影響の低減が図られていると評価する。

(b) 国又は地方公共団体による基準又は目標との整合性の検討

設計及び施工にあたっては、「三重県林地開発許可に関する規則（昭和 50 年 9 月 9 日三重県規則第 49 号）第 7 条に規定する技術基準」に準拠する。

切土のり面は計画切土勾配が 1:0.8 であり、風化の著しい岩や崩積土などについては、適切な対策工を付加する計画である。盛土のり面は必要に応じてボーリング調査や室内土質試験等を実施して安定性を検討した上で、適切な対策工を付加する計画である。土砂の堆積が推定される場所における盛土造成では、地質調査の結果を踏まえ、地盤改良や布団かご工などにより対策を行うことで土砂を不安定化させずに施工を行う計画である。

以上のことから、事業の実施に伴う土地の安定性の確保等地形及び地質への影響は実施可能な範囲内で影響の低減が図られていると評価する。

GPI が

縦排水溝を通じて斜面に放流される計画である。したがって、斜面から渓流へと流れれる現状と比べて、渓流の水量に大きな変化は生じないものと考えられる。

と考えるのは自由だし、

これらの環境保全措置を講じることで、事業の実施に伴う土地の安定性の確保等地形及び地質への影響は、実施可能な範囲内で影響の低減が図られていると評価する。

台風も巨大化している、線状降水帯も発生する。企業が最善を尽くすのは当然のことである。（GPI は住民からの質問状を無視したので、GPI が最善を尽くしていると認めているのではない。説明会を録音禁止にしたのは、最悪の行為だと思っている。）それでも、被害が出る、災害が起こるのが現実である。

他社の例を見れば、大規模崩落が起きるのは十分予測されるのです。その中で工事を計画しているのが GPI なのです。このような行為に対しては、厳しい責任追及があるのが当然です。

大人は、“頑張ったのだけど”、と言っても許しては貰えません。責任を取るには、お金も、人材も必要です。GPI は責任について、どのように考え、どのような準備をしているのか、明確にすべきです。

事業者見解 4-61 :

本事業の実施に当たっては、ご指摘のような土砂崩れ等が発生しないよう、現地の地形や地質を踏まえ、林地開発許可基準等に準拠した適切な設計・施工を行います。また、供用時は管理用道路や風車ヤードの適切な維持管理に努め、土砂流出等の不具合を確認した場合は、事業者の責任において復旧を行います。

見解 4-61 の問題点：

崩落が起きているのは、シーテックの風車に関連する道路などです。GPI は、

“土砂崩れ等が発生しないよう、現地の地形や地質を踏まえ、林地開発許可基準等に準拠した適切な設計・施工を行います。”

と言うが、まさか、シーテックが不適切な工事を行ったから崩落が起きたと思っているのではないでしょうね。

GPIは、配慮書の段階で、大臣意見として、配慮書に関する、次の指摘を受けている。

「(仮称) 平木阿波ウインドファーム事業」における調査結果の活用や他事業者との情報交換等に努め、累積的な影響について、適切な調査、予測及び評価を行うこと。また、重大な影響が懸念された場合は、適切な環境保全措置を講ずること。

これに対して、GPIは次のように答えた。

他事業者の計画している風力発電設備や既存の風力発電所については、公開情報の収集や他事業者との情報交換に努めます。

近隣地域の同業者との情報交換に努めれば、土砂崩れの問題は、すぐに分かるはずです。大幅に崩落して道路が無くなれば、風車のメンテナンスも、修理も、撤去作業も出来なくなります。

当然、シーテックとの情報交換をしたと思われる。シーテックの工法が GPI の工法と比べて劣っているものだったのか、それとも技術的には同等の工法だったのかの確認は出来ていると思う。

“適切な設計”の中身が書いてない。どのような設計をすれば、すでに起きている崩落を防げるのかが、全く書いてない。

GPIは

“供用時は管理用道路や風車ヤードの適切な維持管理に努め、土砂流出等の不具合を確認した場合は、事業者の責任において復旧を行います。”

と言うが、何をどこまで復旧する計画なのかが書いてない。特に、崩落してしまった土砂の処理や具体的な対応に関する記述が全く見られない。崩落してしまった土砂に関しての具体策をします形での責任の取り方が準備書に書かれていません。

すでに起きている崩落を見れば、予測できる事柄なのに、具体的な対策を表明しない。準備書で具体的な案崩落対策を表明すれば、GPIに対する信頼が増します。

他事業者との情報交換等に努め、累積的な影響について、適切な調査、予測及び評価を行うこと。

とあるのだから、近隣の業者に聞けば、河川の土砂撤去の費用は分かるし、流出する土砂の累積的な影響も簡単に予測できる。

GPIは自らの発言にしっかりと責任を持ち、その責任感を準備書の中に反映させるべきであった。

また、GPIは次のようにも言っている。

これらの環境保全措置を講じることで、事業の実施に伴う土地の安定性の確保等地形及び地質への影響は、実施可能な範囲内で影響の低減が図られていると評価する。

実行可能な範囲内で影響の低減を図ったから、その後何が起こっても責任は取らない。としか聞こえません。そもそも、実行可能と判断するのが GPI では、まったく話になりません。この言葉は、責任放棄宣言でしかないのです。

この地域では、風車建設に関連して、路肩の崩落などが起きている。他社も、GPI と同様の工夫をして工事

をしたはずである。

でも、崩落が起きてしまった。同じような地質の場所に、同じような道路を作るのだから、当然崩落は起きると予測すべきである。崩落が起きれば、土砂の被害が出る。

実際に、崩落している道路が近くに存在する現実に踏まえての予測をして、その責任をどうとるのかを明確にしなくてはなりません。

頑張ったけど、できなかつたというような言い訳が通るのは、小学生までです。

いくら、予測が気楽であっても、現実は厳しい。土砂で河川や水路が埋まる。これを放置すれば、大雨の時に、土砂によって作られた自然堤防が決壊して、洪水に見舞われます。現実に即して土砂の動きを予測して、土砂の撤去費用を計画に盛り込んでおかなければなりません。

GPI は次の予測をします。

(ii) 予測結果

沈砂池からの排水濃度の予測結果を表 10.1.6-12 に、予測地点における水質を表 10.1.6-13 に示す。

降雨強度 3mm/h における沈砂池からの排水の浮遊物質量の濃度は 9.1~24.1 mg/l、降雨強度 10mm/h における沈砂池からの排水濃度は 16.5~45.8 mg/l、10 年確率降雨である降雨強度 188.9mm/h における沈砂池からの排水濃度は 70.9~335.8 mg/l であった。

これら排水が沢に流入した後の、各沢の水質調査地点における最大の浮遊物質量の濃度は、降雨強度が 10 年確率の 188.9 mg/l の場合であり、沈砂池(1)の排水が流入する「水質-4」では現況の降雨時の 4 mg/l から 4.2 mg/l に、沈砂池(2)及び(3)の排水が流入する「水質-5」では現況の降雨時の 3 mg/l から 3.7 mg/l に、沈砂池(4)の排水が流入する「水質-3」では現況の降雨時の 8 mg/l から 9.1 mg/l に、沈砂池(5)及び(10)、(11)の排水が流入する「水質-2」では現況の降雨時の 9 mg/l から 14.2 mg/l に、沈砂池(6)及び(8)の排水が流入する「水質-1」では現況の降雨時の 4 mg/l から 5.9 mg/l に、沈砂池(7)の排水が流入水「水質-8」では現況の降雨時の 14 mg/l から 14.3 mg/l に増加すると予測された。全体的に開発面積が小さいことから、濁水への影響は小さいものと考えられる。

土砂の撤去費用は、GPI が全額負担すべきだと考える。まさか、崩落した土砂が川を埋めたことの証明ができるまでは、撤去費用を負担しないつもりなのであろうか？もしそうならば、盛り土のすべての粒子を着色しておいて下さい。

裁判で負けるまでは、責任を取らないという考え方もある。GPI は土砂崩落についてどのような責任をとるつもりなのか、裁判をしなくても費用を負担する気持ちがあるのか無いのかを知りたい。

事業者見解 4-63 :

本事業の実施に当たっては、ご指摘のような土砂崩れ等が発生しないよう、現地の地形や地質を踏まえ、林地開発許可基準等に準拠した適切な設計・施工を行います。また、供用時は管理用道路や風車ヤードの適切な維持管理に努め、土砂流出等の不具合を確認した場合は、事業者の責任において復旧を行います。

GPI は“管理用道路や風車ヤードの適切な維持管理に努め、土砂流出等の不具合を確認した場合は、事業者の責任において復旧を行います。”

というが、管理道路や風車ヤードの復旧だけでは済みません。外に流れ出て、農業用の水路などを塞いでしまう土砂の撤去も必要なのです。

GPI は、自分の所しか復旧しないのでしょうか？広範囲に流れ出た土砂は、回収しないのでしょうか？水路復旧のお金を GPI が払います。人員を確保して必ず水路を、全て復旧させます。住民から連絡があれば、GPI の社員が直ちに出向いて水路の土砂を撤去します。と言ってみてはどうですか。

道路の復旧工事は当然であるが、問題は流れ出た土砂の処理です。細かな粒子は、下流の農業用水を埋めます。それを撤去するのは、住民なのか、GPI なのか、その費用はだれがどのように負担するのかが書かれていません。

これは、他の地域でも起こっている事柄です。

この沈砂池は、工事のとき、大量の泥水が海や住宅地に流れ込んだため、対策として作られたものですが、大雨の後はこれがあふれてしまい、さらにもう一つ作ったそうです。

これも全国の風車建設現場で起きている典型的な公害。滝根小白井ウインドファームでも、建設中から降雨後の泥水流出がひどく、下流の夏井川では岩魚や山女が産卵できなくなり、夏井川漁協が事業者に補償を求めました。



沈砂池ひとつではとても間に合わなかった泥水流出公害

建設予定地の近くでも、他の地域でもよく起きている問題なのに、GPI の予測には、崩落と土砂撤去の問題についての記述が無い。

“裁判で因果関係を証明するのは困難だから、裁判で負けることは無い。”

だから、無視して居直ればよいとでも考えているなら、記載しなかった理由もよく分かる。

もちろん、これは私の邪推である。GPI が崩落と川や水路からの土砂撤去について触れていない理由がきっとあるのでしょう。

土砂撤去について触れていない理由を書くべきです。そうでないと、私以外にも、邪推する者が出てきてしまします。GPI の名誉のためにも、この誤解を解いてくれる説明を期待します。

さらに、GPI が過去に、土砂崩落の責任を取って、河川の土砂撤去や用水路の土砂撤去を GPI の負担で実施した実績についても書いて下さい。

土砂崩落によって農業用水路が埋まるという事態は、風車が撤去され、自然が回復するまで継続的に起こる事柄です。土砂撤去の年間予算を計上している事でしょうから、1か所について、費用と撤去回数、全体での費用と撤去回数を示して下さい。

道路は劣化して、崩落する土砂は増大すると予測されます。土砂撤去費用は将来どの程度まで増大すると予測しているのかも書いて下さい。

これがあれば、農地を管理する人は、自分で土砂を撤去した場合に、撤去費用を安心して請求できます。この請求があった時には、裁判なしで支払ってくれますか？それとも、裁判で負けるまでは、土砂撤去の費用を払わないつもりですか？

私は、裁判なしで、土砂を撤去した人からの支払い要求があったら、時給 2000 円くらいですぐに支払うべきだと思っています。GPI の考え方を伺いたい。

事業者見解 4-64 :

環境影響評価準備書における影響要因及び環境要素は、「発電所に係る環境影響評価の手引」（令和 2 年 経済産業省）に示されている参考項目を基本に、本事業の内容や地域特性を勘案したうえで選定したものであり、これまでの配慮書や方法書の手続きの審査において指摘された事項も加味したものとなっています。

見解 4-64 の問題点 :

GPI は、過去において、土砂崩落に対してどのような形でその責任を取ってきたのかの、具体例を聞いていますのです。

それを書いてくれれば、土砂崩れがあっても、それなりに責任を取る会社だと分かります。具体的な事例が書かれていなければ、計画に対して許可が出たのだから、土砂崩れがあっても、GPI は責任を取りませんと言っているように見えてしまいます。

最近は、大きな台風や、大量の雨も降ります。過去のデータをもとにして許可が出たとしても、自然条件は大きく変化しているのですから、危険性は増しています。その危険性を指摘されているのに、この見解では、危険性は知っているが、GPI の工事が原因で、大きな災害が起こっても、GPI は決して責任は取りません。と断言しているように見えてしまいます。

この GPI の見解を多くの人が見ます。このままでは、GPI が無責任な会社だと誤解されてしまいます。

8.4.2 外来植物と林業

(仮称) 平木阿波ウインドファーム事業及び

(仮称) 平木阿波第二ウインドファーム事業に係る環境影響評価準備書

環境影響評価委員会小委員会 議事概要

日時：令和4年8月29日（月）14:00～17:00

場所：三重県勤労者福祉会館 講堂

において、工事に伴う環境変化に関して次のような質疑応答があった。

委員：改変部分がすごく小さいから、影響が小さいということなのですが、原則改変してはいけない場所となっているわけですので、少しでも改変する場合は、どのような影響が出るかは、ものすごく慎重に評価しなければならないと思います。方法書の審議の時には、水に関する意見もかなり出ていましたが、今のお答えでも改変部分が少ないからと言われていて、それで、果たしていいのかと思います。特に浸透能が確保するからいいということですが、浸透すればいいというわけではなく、全部が急速に浸透すれば、すごく悪影響があるわけで、尾根部のところに、樹木群集が成立しているということで、土壌を支えていたり、或いは浸透するにしても一気に浸透しないといった機能もあるわけですね。そこを全部改変してしまって、地形も変わるので、その影響というのはとても慎重に評価しないといけないのではないかと思います。そのような姿勢が、この記述では考えられないということです。また、他の委員も緑化のことについて意見いただいていると思いますが、これだけ鹿の食害が強いところでは、緑化はうまくいかないんじゃないかなと思います。仮に緑化する場合に、地域の在来種を使って緑化することを方法書の審議の際には強く言っていたと思うが、準備書ではそういうことが書かれていないので、どうお考えかお聞かせください。

事業者：緑化方法につきましては、今ご指摘いただいたように、生態系の観点からは在来種の方が望ましいという考え方になるかと思います。他方、土地の安定性、法面の安定性という意味では在来種でない種を使ってでも早期緑化する方が望ましいというような考え方もあるところで、具体的に現地の状況、或いは周辺の植生を見ながら、今後検討していきたいというふうに考えています。

委員：方法書の審議の際に、他の委員の方から在来種を使うことについて、調査と並行しながらも種子を採取するといったことが、調査まで時間がある中でできるのではないかという意見に対し、それも含めて検討すると言われたわけですが、これだけ時間が経過した中で今のご回答ということは特にそういった在来種を地域で集めて使うという考えはないということですか。

事業者：考え方としては、先ほど述べさせていただいたとおりです。実際の緑化方法については、本日もご意見いただけておりますので、今後情報収集しながら検討したいと考えています。委員：多分鹿の食害でうまくいかないと思います。切った跡のところで緑化しても定着をしにくいような状態だと思いますので。改変したところの周りを、鹿の防護柵で囲うなど、緑化を成功させて、その場所の植物を保全するための積極的な手法を検討されてもいいかと思います。

事業者：今アドバイスいただきいただきました食害が強く想定されるような場合においては、柵を使うようなことも含めて、検討したいというふうに考えます。

委員：最後になりますが、準備書で何度も不確実性という言葉が出てきていて、当然予測には不確実性が伴うことは思いますが、地域の方からは肯定的なコメントとは言い切れないような意見も確認できます。この地域はすでに100基ぐらいの風車が立っていて、今回の事業と直接的に関わり合いはないかもしれません、住んでいる方にとて見たら、結局どこの会社がやっていてもどんどん増えて、1個1個に不確実性が伴うと、累積することで、地域の方々にとっての不安要素というのはどんどん大きくなるわけですね。そういうことを

しっかりと考えないと、いつまでたっても理解は進まないのではないかと私は思います。なのでさっきのここでやる意義とかですね、なぜここで必要なのかということを明確にして理解を求めるような姿勢がないと、この一部の地域にどんどん風車を立ててカーボンニュートラルとなったとしても、それは本当に地域の一部の方々に負担を強いる形で実現するという極めてアンフェアに感じますので、それでもこの場所で事業をする意義というのがあるのであれば、それを記載する必要があると思います。

事業者：地域の皆様の理解を醸成していくにあたってコミュニケーションをとっていくべきということだと思いますが、ご指導いただいたように、積極的に事業の必要性を含めてコミュニケーションを図っていきたいと思います。

さて、

専門家から、

委員：方法書の審議の際に、他の委員の方から在来種を使うことについて、調査と並行しながらも種子を採取するといったことが、調査まで時間がある中でできるのではないかという意見に対し、それも含めて検討すると言われたわけですが、これだけ時間が経過した中で今のご回答ということは特にそういった在来種を地域で集めて使うという考えはないということですか。

と言わざりとも、

GPI は種子の保存に関する答えをはぐらかしている。それは、専門家の指摘は無視すると言う事になってしまします。

また、

事業者：地域の皆様の理解を醸成していくにあたってコミュニケーションをとっていくべきということだと思いますが、ご指導いただいたように、積極的に事業の必要性を含めてコミュニケーションを図っていきたいと思います。

とは言うのだが、“種子を確保し、在来種を使います。”とは言いません。

植林では、下草刈りが必要です。理由は単純です。植林した苗木が生育するには光が必要だからです。

この下草刈りは、木が大きくなつて、下草が伸びても木までは届かない状態になるまで、継続しなくてはなりません。

外来種の種を蒔く理由は、早く成長して、管理が簡単だからです。これは、草がどんどん育ち、その草はほかの植物を圧倒して、どんどん広がることを意味しています。

こんな草が増えたら、下草刈りの1年間の回数は2倍、3倍になります。もし、外来種が上にも伸びるようならば、木が外来種の植物の高さ以上に成長するまでの期間が長くなります。もし、つる性の草ならば、管理に必要な年数も3倍、4倍になります。

これは、林業での必要経費が大幅に増加することを意味しています。人件費と考えたら、どれくらいの損失になるでしょうか？

林道ができても、林業の基盤が失われるのです。

植相が変化すれば、動物も変化します。理由は、餌となるものが変化してしまうからです。

花が減れば、観光客も減ります。地域経済にも、大きな損失をもたらします。